

KOMBINATORIKA

ZADACI ZA VJEŽBU

1. U 28 klupa treba smjestiti 25 učenika nekog razreda. Na koliko se to načina može učiniti?
2. Koliko različitih osmeroznamenastih brojeva postoji (koji mogu započeti nulama) i koji imaju
 - (a) dvije jedinice, dvije dvojke i još četiri različite znamenke,
 - (b) pet jednakih znamenaka,
 - (c) četiri para jednakih znamenaka,
 - (d) simetričan raspored znamenki,
 - (e) sve znamenke različite ali u rastućem poretku?
3. Student mora u roku od 8 dana položiti 4 ispita. Na koliko načina to može učiniti ako
 - (a) u jednom danu može položiti najviše jedan ispit?
 - (b) osmi dan polaže točno jedan (posljednji) ispit?
 - (c) ispite mora polagati točno određenim redosljedom i u različim danima?
4. Koliko ima permutacija u skupu $\{1, 2, \dots, 2n\}$ kod kojih je svaki parni broj na parnoj koordinati?
5. Koliko ima peteroznamenastih brojeva s parnim brojem parnih znamenaka?
6. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 10^9 u čijem zapisu se pojavljuje niz znamenaka 123?
7. Koliko se devetslovnih riječi može napisati od 30 slova abecede tako da
 - (a) svaka riječ sadrži točno 3 različita samoglasnika i točno 6 različitih suglasnika
 - (b) svaka riječ sadrži ili 2 ili 3 samoglasnika (ne nužno različita)?
8. Koliko ima permutacija skupa $\{1, 2, \dots, 20\}$ koji ne fiksiraju ni jedan neparan broj?
9. Koliko ima neparnih brojeva između 100 i 999 koji imaju različite znamenke?
10. U zgradi od 5 katova u prizemlju uđe u dizalo 9 ljudi. Na koliko različitih načina oni mogu izaći iz dizala? Koliko je načina ako tražimo da na svakom katu izađe barem jedan čovjek?
11. Od 8 dječaka i 3 djevojčica treba odabrati grupu koja se sastoji od
 - (a) 5 djece, od kojih su barem 2 dječaka,
 - (b) bilo koji broj djece ali mora biti jednak broj dječaka i djevojčica.Na koliko ih načina možemo odabrati?
12. Na kolokviju su tri zadatka. Kolokviju je pristupilo 120 studenata. Prvi zadatak riješilo je 56 studenata, drugi 44, a treći 34. Sva tri zadatka riješilo je 12 studenata, a točno dva zadatka 17 studenata. Koliko studenata nije riješilo niti jedan zadatak?

13. Koliko različitih osmeroznamenastih brojeva postoji ako se smiju koristiti samo znamenke 1, 2, 3? Koliko takvih brojeva postoji kod kojih se znamenka 3 pojavljuje točno 3 puta?
14. Imamo 12 bijelih i 8 crnih kuglica. Na koliko se različitih načina one mogu poredati ako dvije crne kuglice ne smiju biti zajedno?
15. Koliko ima četveroznamenastih brojeva kod kojih je svaka sljedeća znamenka veća od prethodne?
16. Koliko ima brojeva između 1 i 1100 koji nisu djeljivi sa 6, 10 i 15?
17. Na koliko načina može 5 žena i 5 muškaraca stati u red tako da alterniraju? Koliko različitih razmještaja imamo ako te osobe smještamo za okrugli stol?
18. Imamo grupu od 18 ljudi.
 - (a) Na koliko načina ih možemo razvrstati u 9 grupa po dvoje (tj. u 9 parova)?
 - (b) Na koliko načina možemo odabrati petoricu ako određena dva čovjeka moraju biti ili oba odabrana ili oba neodabrana?
 - (c) Na koliko načina možemo odabrati troje ljudi koji će otputovati u tri različita grada?
19. Uplatili smo dvije kombinacije lota 6/45 koje nemaju zajedničkih brojeva. Na koliko načina mogu biti izvučeni brojevi tako da dobijemo točno jednu trojku? Dopunski broj zanemarite!
20. Koliko ima šesteroznamenastih prirodnih brojeva koji u zapisu imaju najviše jednu znamenku 1?
21. Odredite broj surjekcija iz n -članog skupa u k -člani skup ($n \geq k$).
22. Koliko ima k -znamenastih brojeva u brojevnom sustavu s bazom n ?
23. Na koliko načina možete 15 jednakih kuglica rasporediti u 10 kutija tako da
 - (a) kutije mogu biti prazne,
 - (b) nijedna kutija ne bude prazna?
24. Na koliko načina možete 15 različitih kuglica rasporediti u 10 kutija tako da
 - (a) kutije mogu biti prazne,
 - (b) nijedna kutija ne bude prazna?
25. Unutar jednakokraničnog trokuta stranice 1 zadano je 10 točaka. Dokažite da među njima postoje dvije čija udaljenost nije veća od $\frac{1}{3}$.
26. Na koliko se načina može 18 ljudi razvrstati u 6 grupa po troje?
27. Na koliko načina možemo 59 jednakih predmeta staviti u 5 kutija tako da nijedna ne bude prazna?

28. Koliko ima rješenja $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}_0^3$ za koje je

$$x_1 + x_2 + x_3 = 25, \text{ ako je } x_1 \geq 3, x_2 \geq 4, x_3 \geq 5?$$

29. Odredite koeficijent uz x^{12} u polinomu

$$(1 + x)^9 (1 + x^8 - x^{10})^4.$$

30. Koliko ima najkraćih puteva u cjelobrojnoj mreži od ishodišta do točke $(9, 9)$ koji ne prolaze točkom $(3, 2)$?

31. Koliko ima rješenja (x_1, \dots, x_4) za koje je

$$x_1 \cdot \dots \cdot x_4 = 3^7$$

ako su

(a) $x_i \in \mathbb{N}$

(b) $x_i \in \mathbb{Z}$?

32. Na koliko se načina može 18 bijelih i 9 crnih kuglica rasporediti u 3 kutije? Koliko je načina da sve kutije imaju jednak broj kuglica, od kojih barem 5 bijelih?

33. Koliko ima različitih sumanada u razvoju izraza

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_{90})^{99}?$$

Kolika je suma svih multinomnih koeficijenata tog razvoja?

34. (a) Na koliko se načina 20 različitih kuglica može podijeliti u tri skupine od po 4, 7 i 9?

(b) Koliko ima osmeroznamenastih neparnih prirodnih brojeva u čijem zapisu nema susjednih znamenaka 8?

35. (a) Na koliko se načina može broj 25 rastaviti na točno 7 dijelova?

(b) Na koliko se načina može u 5 kutija staviti između 10 i 15 predmeta?