Vjerojatnost i statistika

E. Kovač Striko
B. Ivanković
T. Fratrović

12. ožujka 2007.

Sadržaj

1 Kombinatorika

1.1 Uvod

Kombinatorika (latinski *combinare* = slagati) je dio matematike koji izučava svojstva konačnih skupova. Iz elemenata jednog skupa možemo na neki određeni način graditi nove skupove. Obradit ćemo rješavanje problema prebrojavanja i strukture konačnih skupova, te konstrukcije i svojstva njihovih podskupova.

Navedimo neke od tipičnih problema:

1. Koliko iznosi zbroj prvih 50 prirodnih brojeva, a koliki je zbroj prvih 100 prirodnih brojeva? *(Rješenje: 1275;1326.)*

2. Može li se svaki od pet telefona spojiti s točno tri preostala? *(Rješenje: ne)*

3. Na koliko različitih načina može četvero ljudi sjesti za okrugli stol? *(Rješenje: 6)*

4. Koliko ukupno utakmica odigraju momčadi nogometne hrvatske lige ako svaki klub odigra po dvije utakmice sa svakim od preostalih klubova? *(Rješenje: 132)*

5. Na koliko načina može troje ljudi podijeliti dvije kovanice od po jedne kune? *(Rješenje: 6)*

6. U društvu od četvero ljudi svaka dvojica imaju točno jednog zajedničkog prijatelja. Dokažite da u tom društvu postoji osoba koja je prijatelj svim ostalim članovima društva.

7. Svaki je član nekog kolektiva u točno dvije delegacije, a svake dvije delegacije imaju točno jednog zajedničkog člana. Ukupno, taj kolektiv ima 5 delegacija. Koliko članova ima taj kolektiv? *(Rješenje: 10)*

8. Koliko ima peteroznamenkastih brojeva u kojima je svaka znamenka tog broja veća od zbroja dviju znamenaka neposredno s njoj desne strane? *(Rješenje: 49)*

9. Na koliko se različitih načina 6 ploha kocke može obojiti ako imamo četiri boje, a isti načini bojanja su oni koji se mogu rotacijama dovesti do poklapanja? *(Rješenje:* $6 \cdot 14 = 84$*)*

Ovo su samo zgodne zagonetke i služe za razonodu. Povijesno gledano, kombinatorika je kao znanstvena disciplina nastajala postepeno, a svoje korijene vuče iz zabavne matematike, zagonetki i igara još od 17. stoljeća. Kombinatorika se danas primjenjuje u biologiji, kemiji, elektronici, medicini, lingvistici, sociologiji, prometu, . . .

1.2 Osnovni principi prebrojavanja

Broj elemenata skupa S označit ćemo s kS. Ako je $S = \{a, b, c, d\}$, tada je $kS = 4$.

Za prazan skup $\emptyset$, $k\emptyset = 0$.

Ako su $S_1, S_2, \ldots, S_n$ međusobno disjunktni konačni skupovi, onda je njihova unija konačan skup i vrijedi

$$k(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n) = kS_1 + kS_2 + \cdots + kS_n. \tag{1}$$

(1) predstavlja broj načina da se izabere jedan element ili iz S_1 ili S_2 ili $\ldots S_n$.

Ako konačni skupovi nisu međusobno disjunktni, tada vrijedi:

Formula uključivanja - isključivanja, koja prebrojava nedisjunktne unije:

1. Ako su A i B konačni skupovi, tada vrijedi:

$$k(A \cup B) = k(A) + k(B) - k(A \cap B). \tag{2}$$

2. Ako su A, B i C konačni skupovi, tada vrijedi:

$$k(A \cup B \cup C) = k(A) + k(B) + k(C) - k(A \cap B) - k(A \cap C) - k(B \cap C) + k(A \cap B \cap C). \tag{3}$$

3. Ako su $A_1, A_2, \ldots, A_m$ konačni skupovi:

$$\begin{aligned} k\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{m} k(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le m} k(A_i \cap A_j) + \\ &+ \sum_{1 \le i < j < k \le m} k(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots \\ &+ \cdots (-1)^{m+1} \cdot k\left(\bigcap_{i_1}^{m} A_i\right). \end{aligned}$$

Primjer 1.1 *Na koliko načina možemo izabrati jedan element bilo iz skupa $A = \{1, 2, 3\}$ bilo iz skupa $B = \{4, 5\}$, bilo iz skupa $C = \{10, 11, 12, 13\}$?*

Rješenje: Po formuli (1)

$$\begin{aligned} k(A \cup B \cup C) &= kA + kB + kC \\ &= 3 + 2 + 4 = 9. \end{aligned}$$

Izbor je moguće učiniti na 9 načina.

Primjer 1.2 *Neka je A skup prirodnih brojeva djeljivih s 5 i manjih od 16, a B skup parnih prirodnih brojeva manjih od 16. Koliko ima brojeva manjih od 16 koji su parni ili djeljivi s 5?*

Rješenje: Navedeni skupovi su

$$A = \{5, 10, 15\}, \quad B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$$

Presjek skupova je

$$A \cap B = \{10\}.$$

Po formuli (2)

$$k(A \cup B) = 3 + 7 - 1 = 9.$$

Primjer 1.3 *U nekom društvu umirovljenika primijetili su da nema člana koji ne bi bio ćelav ili ne bi nosio naočale. U trenucima dokolice ustanovili su da je 31 član ćelav, da ih 24 nosi naočale i da ih 12 ima naočale i istovremeno su ćelavi. Koliko članova ima društvo penzionera?*

Rješenje: Po formuli (2) dobiva se broj članova društva

$$31 + 24 - 12 = 43$$

.

Primjer 1.4 *U skupu od 100 studenata engleski jezik zna 28 studenata, njemački 30, francuski 42, engleski i njemački zna njih 8, engleski i francuski 10, njemački i francuski 5, dok sva tri jezika znaju samo 3 studenta. Koliko studenata ne zna nijedan jezik?*

Rješenje: Po formuli (3) **barem jedan** jezik zna

$$28 + 30 + 42 - 8 - 10 - 5 + 3 = 80 \quad \text{studenata.}$$

Niti jedan jezik nezna

$$100 - 80 = 20 \quad \text{studenata.}$$

Zadatak 1.5 *U nekom razredu svaki učenik uči barem jedan od tri strana jezika. 18 ih uči engleski, 15 njemački, a 9 francuski. 10 ih uči engleski i njemački, 7 ih uči engleski i francuski, a 6 francuski i njemački. 5 učenika uči sva tri jezika.*

a) Koliko učenika ima u tom razredu?

b) Koliko učenika uči samo njemački?

c) Koliko učenika uči engleski i francuski, ali ne i njemački?

Rješenje: a) 24; b) 4; c) 2.

Primjer 1.6 *U jednom gradu, koji ima samo 40.000 stanovnika, organiziraju se u dobrotvorne svrhe razne aktivnosti. Gradonačelnik se na kraju godine pohvalio da su održana dva koncerta i lutrija, te da je svaki drugi građanin sudjelovao u dobrotvornim aktivnostima.*

Poznato je da je na koncertu ozbiljne glazbe bilo 2.000 posjetilaca, na rock-koncertu 8.000, te da je po jedan listić lutrije kupilo 12.000 stanovnika. Nadalje, poznato je da je 500 ljudi bilo na oba koncerta, da je 50 ljudi koji su bili na koncertu ozbiljne glazbe sudjelovalo u lutriji, te da je 3.000 posjetilaca rock-koncerta kupilo lutriju. Nitko nije kupio više od jednog listića lutrije.

Što mislite o gradonačelniku?

Rješenje: Provjeriti tvrdnju gradonačelnika formulom (3). Barem u jednoj dobrotvornoj akciji sudjelovalo je

$$2000 + 8000 + 12000 - 500 - 50 - 3000 = 18450 \quad \text{stanovnika.}$$

Gradonačelnik ne govori istinu, jer očito 18450 stanovnika ne predstavlja polovicu broja građana grada.

Zadatak 1.7 *U nekom gradu ima 12000 bijelih automobila, 15000 ih je s alarmom i 20000 bez ABS-a. Osam tisuća bijelih ima alarm, 6000 automobila s alarmom ima ABS, 5000 bijelih ima ABS, dok je njih 1000 bijelo s alarmom i ABS-om. Koliko grad ima automobila?*

Rješenje: Nakon raspoloživih podataka možemo tvrditi da je automobila u gradu barem 30000. Pazite na ABS!

Kartezijev produkt konačnih skupova $S_1, S_2, \ldots, S_n$ je konačan skup

$$S_1 \times S_2 \times \cdots S_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in S_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

za koji vrijedi

$$k(S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n) = k(S_1) \cdot k(S_2) \cdots k(S_n).$$

Teorem o uzastopnom prebrojavanju osnovni je teorem u kombinatorici.

Teorem 1 *Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_m$ konačni skupovi i neka je*

$$T \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m$$

skup uređenih m-torki $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ definiranih na sljedeći način:

- *prva komponenta* $a_1 \in A_1$ *može se birati na* $k_1 \le kA_1$ *različitih načina,*

- *za svaku već odabranu komponentu* a_1*, drugu komponentu* $a_2 \in A_2$ *može se izabrati na* $k_2 \le kA_2$ *različitih načina,*

  ...

- *kada su izabrane komponente* $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ *posljednja komponenta* $a_m \in A_m$ *može se izabrati na* $k_m \le kA_m$ *različitih načina.*

Tada je broj elemenata skupa T *jednak*

$$kT = k_1 \cdot k_2 \cdots k_m.$$

Primjenom teorema o uzastopnom prebrojavanju rješavaju se sljedeći primjeri.

Primjer 1.8 *U razredu koji broji* 20 *učenika, treba izabrati predsjednika, njegova zamjenika i blagajnika. Koliko je različitih mogućnosti za izbor tročlanog povjerenstva razreda?*

Rješenje: Broj povjerenstava jednak je

$$20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840.$$

Primjer 1.9 *Iz grada* A *u grad* B *vode četiri ceste, a iz* B *u* C *pet. Na koliko načina možemo iz grada* A *preko* B *stići u* C*?*

Rješenje:

$$4 \cdot 5 = 20 \quad \text{načina.}$$

Primjer 1.10 *Na nekom je šahovskom turniru odigrano* 78 *partija. Turnir je igran po principu da je svaki igrač odigrao sa svakim samo jedan meč. Koliko je bilo šahista na turniru?*

Rješenje: Neka je n broj šahista i neka su to poimenice: $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Uređenih parova $(A_i, A_j), i \neq j$ ima $n(n-1)$. Parovi (A_i, A_j) i (A_j, A_i) predstavljaju jednu te istu partiju. Ukupan je broj partija jednak $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$. Slijedi jednadžba

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2} = 78.$$

Jedino mogući $n = 13$. Na turniru sudjelovalo je 13 šahista.

Primjer 1.11 *Koliko dijagonala ima konveksni* 12*-terokut?*

Rješenje: Iz svakog vrha konveksnog n-terokuta moguće je povući $n-3$ dijagonale. Budući vrhova ima n, a svaka se dijagonala broji dva puta, dijagonala ima $\frac{n(n-3)}{2}$ Za $n = 12$ broj dijagonala jednak je 54.

Primjer 1.12 *Koliko ima peteroznamenkastih brojeva čije su svake dvije susjedne znamenke različite?*

Rješenje: Na prvo mjesto može doći bilo koja znamenka osim 0, dakle 9 znamenaka. Kad se prva znamenka odabere, drugo je mjesto moguće popuniti opet na 9 načina, jer se ne smije staviti znamenka kao na prvom mjestu. Broj takovih 5-znamenkastih brojeva je:

$$9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 59049.$$

Primjer 1.13 *Kada bi se registarska pločica sastojala od 3 znamenke i najviše dva slova abecede koja ne mogu biti palatali, koliko bi se različitih pločica moglo izdati na jednom registarskom području?*

Rješenje: Prva se znamenka može izabrati na deset načina. Za svaku tako izabranu znamenku, druga se opet može izabrati na 10 načina, kao i treća. Abeceda ima 8 palatala, pa u obzir dolaze 30-8=22 slova. Ukupno:

$$\underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 22 \cdot 22}_{\text{2 slova}} + \underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 22}_{\text{1 slovo}} = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 23 \cdot 22$$

Zadatak 1.14 *Ako na području Republike BIH registarske tablice imaju troznamenkasti broj, zatim slovo koje postoji i jednako je u azbuci i abecedi, a onda ponovo troznamenkasti broj, koliko se tablica može izdati na području susjedne države?*

Rješenje: analogno prethodnom, ako su zajednička slova azbuke i abecede: A, B, E, I, J, K, M, O i T:

$$10^3 \cdot 9 \cdot 10^3.$$

Zadatak 1.15 *Koliko ima različitih telefonskih brojeva od 7 znamenaka? Koliko od njih ima*

a) prve tri znamenke neparne?

b) prve dvije znamenke jednake?

c) sve znamenke različite?

d) prve tri i posljednje tri jednake?

e) sve različite, s tim da su prva, treća i peta neparne, a druga, četvrta i šesta parne?

Rješenje:

$$9 \cdot 10^6$$

a)

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$$

b)

$$9 \cdot 1 \cdot 10^5$$

c)

$$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4.$$

d)

$$9 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1.$$

e)

$$5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 10.$$

1.3 Permutacije

Permutacija (premjesdba) je bilo koja uređena n-torka.

1.3.1 Permutacije bez ponavljanja

Neka skup S sadrži n elemenata. Svaku uređenu n-torku elemenata skupa S kojoj su sve komponente različite nazivamo **permutacijom bez ponavljanja** skupa S, ili kraće **permutacijom skupa** S.

Primjer 1.16 *Napisati sve permutacije bez ponavljanja skupa* $S = \{1, 2, 3\}$?.

Rješenje: Permutacije u leksikografskom poretku glase:

$$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1).$$

Označimo broj permutacija bez ponavljanja ili kraće permutacija sa P_n. Tada do broja P_n dolazimo primjenom Teorema o uzastopnom prebrojavanju.

Na prvo mjesto u n-torki može doći bilo koji od n elemenata skupa S, kada je prvo mjesto popunjeno, drugo mjesto se može popuniti na $n-1$ načina, ..., a kada je prvih $n-1$ mjesta popunjeno posljednje, n-to mjesto može se popuniti samo na jedan jedini način.

Slijedi da je

$$P_n = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 = n!,$$

gdje se $n!$ čita kao n **faktorijela** i ima sljedeće svojstvo:

$$\begin{aligned} n! &= n \cdot (n-1)! \\ &= n(n-1) \cdot (n-2)! \\ &= n(n-1)(n-2)\cdots(k+2)(k+1) \cdot k!, \quad \text{za} \quad k < n. \end{aligned}$$

Po definiciji se uzima

$$0! = 1.$$

Primjer 1.17 *Izračunajte prvih šest faktorijela. Do koje faktorijele računa vaš kalkulator?*

Rješenje:

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ 1! &= 1 \\ 2! &= 2 \\ 3! &= 6 \\ 4! &= 24 \\ 5! &= 120 \\ 6! &= 720 \end{aligned}$$

Naš kalkulator računa do $69! = 1.71 \cdot 10^{98}$.

Stirlingovu formulu koristimo za velike brojeve n kod približnog računanja:

$$n! \approx (\frac{n}{e})^n \cdot \sqrt{2\pi n}$$

Primjer 1.18 *Na koliko načina može 8 ljudi čekati u redu za ulaznice?*

Rješenje: Na $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdots 1 = 8! = 40320$ načina.

Primjer 1.19 *Koliko permutacija ima riječ PROMET?*

Rješenje:

$$6! = 720.$$

Primjer 1.20 *Na koliko načina može 5 muškaraca i 5 žena sjesti u red u kinu sa 10 sjedala, a da nikoje dvije osobe istog spola ne sjede skupa?*

Rješenje:

$$2(5!)^2 = 28800$$

jer na prvo mjesto može sjesti bilo muškarac, bilo žena.

Primjer 1.21 *Na koliko načina može 11 vitezova sjesti oko okruglog stola?*

Rješenje: Jednog viteza treba fiksirati, a ostali sjednu na 10! načina.

Primjer 1.22 *Na koliko načina može 5 studenata sjesti na jednu klupu tako da Ivica i Marica, kao dvoje od studenata sjede jedno do drugog?*

Rješenje: Ivicu i Maricu uzeti kao jedan objekt. Sada 4 objekta sjeda na 4! načina. Ivica i Marica mogu zamijeniti mjesta, pa je to $2 \cdot 4! = 48$ načina.

Primjer 1.23 *Na koliko načina mogu 5 dječaka i 2 djevojčice stajati u redu, a da djevojčice ne budu jedna do druge?*

Rješenje:

$$7! - 2 \cdot 6!$$

jer se od svih poredaka izuzimaju oni u kojima djevojčice sjede skupa.

Primjer 1.24 *Na koliko načina može 5 muškaraca i 5 žena sjesti za okrugli stol, a da uvijek između dva muškarca sjedi žena?*

Rješenje: Najprije svi sjednu kako je traženo. Drugačiji se raspored dobiva ako se svaki muškarac zamijeni sa susjednom ženom. Sljedeći se rasporedi dobivaju ako se svi muškarci osim jednog permutiraju. Analogno žene. Zato je broj svih načina:

$$2 \cdot 4! \cdot 4!.$$

Primjer 1.25 *Na nekom sastanku, 5 ljudi A, B, C, D i E trebaju održati referate. Na koliko načina oni mogu biti upisani u spisak govornika?*

a) Koliko je rasporeda, ako B mora govoriti nakon A?
(ne nužno neposredno)

b) Koliko je rasporeda u kojima će A govoriti neposredno prije B?

Rješenje: 120 načina

a) svakom rasporedu u kojem je B nakon A, moguće je naći raspored u kojem je A nakon B (zamjena poredka govornika). Ukupan broj je

$$\frac{1}{2} \cdot 5! = 60$$

b) par AB treba smatrati jednim govornikom, pa je onda broj poredaka 4!

Zadaci za samostalno rješavanje:

1. Koliko je permutacija moguće napraviti od riječi
   a) DUBROVNIK   b) ZAGREB   c) SPLIT

2. Koliko ima peteroznamenkastih brojeva, koji imaju znamenke kao i broj
   a) 34125 b) 12034

3. Neki skup ima n elemenata. ako se tom skupu dodaju dva elementa, onda broj njegovih permutacija postane 90 puta veći. Koliki je n?

4. a) Na koliko se načina 24 učenika jednog razreda mogu svrstati u povorku?
   b) Dva razreda od po 24 učenika trebaju održati susret u šahu. Na koliko načina oni mogu formirati parove protivnika?

5. Na koliko načina 10 osoba može sjesti oko okruglog stola tako da Romeo i Julija uvijek sjede skupa?

6. Na koliko načina mogu za okrugli stol sjesti 6 muškaraca i 6 žena, tako da nikoje dvije osobe istog spola ne sjede jedna do druge?

7. Koliko ima peteroznamenkastih parnih brojeva koji imaju znamenke kao i broj 56079

Rješenja:

1. a)362880, b)720, c)120;
2. a)120 b)96;
3. 8;
4. a)24!, b)$(24!)^2$;
5. $2!8! = 80640$
6. $2 \cdot 5! \cdot 5!$
7. $\frac{5!}{2} - \frac{4!}{2}$.

1.3.2 Permutacije s ponavljanjem

Multiskup S je skup koji se sastoji od n elemenata s tim da je među njima n_1 jednakih elemenata prve vrste, n_2 jednakih elemenata druge vrste, ..., a n_k jednakih elemenata k-te vrste, tako da vrijedi:

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n.$$

Svaka uređena n-torka elemenata multiskupa S naziva se **permutacija s ponavljanjem**.

Broj svih permutacija s ponavljanjem označavamo sa $P_n^{n_1,n_2,\ldots n_k}$. Vrijedi

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}.$$

jer jednakih permutacija ima $n_1! \cdot n_2! \cdot n_k!$.

Primjer 1.26 *Koliko se 5-znamenkastih brojeva može napisati znamenkama* $\{1,1,1,2,3,3\}$*?*

Rješenje: Traženih brojeva ima

$$P_6^{3,1,2} = \frac{6!}{3! \cdot 1! \cdot 2!} = 60.$$

Prilikom ispisivanja permutacija pogodno je pridržavati se **leksikografskog poretka**, sličnog poretku riječi u rječniku.

Zadatak 1.27 *Ispišite sve anagrame riječi* $MAMA$.

Rješenje: Leksikografski, to su

$$\begin{array}{c} AAMM \\ AMAM \\ AMMA \\ MAAM \\ MAMA \\ MMAA. \end{array}$$

Nakon ispisivanja dobili smo ih

$$P_4^{2,2} = \frac{4!}{2!2!} = 6.$$

Primjer 1.28 *U koliko permutacija slova riječi JUPITER samoglasnici dolaze po abecednom redu?*

Rješenje: Budući samoglasnici moraju imati točan redoslijed, svi se samoglasnici mogu poistovjetiti, pa se permutira multiskup

$$\{J, s, P, s, T, s, R\}$$

na

$$P_7^3 = \frac{7!}{3!} = 840$$

načina.

Zadatak 1.29 *Kolika anagrama ima riječ* $MATEMATIKA$*?*

Rješenje:

$$\frac{10!}{2!2!3!} = 151200$$

Zadatak 1.30 *Koliko se peteroznamenkastih brojeva može zapisati tako da se znamenka 3 upotrijebi tri, a znamenka 7 dva puta?*

Rješenje:

$$\frac{5!}{3!2!} = 10$$

Primjer 1.31 *Odjeljak vagona (kupe) ima dvije klupe po 4 mjesta. Od 8 putnika, njih 3 žele sjediti s licem okrenutim u smjeru vožnje vlaka, a 2 u suprotnom smjeru, dok je ostalima svejedno kako sjede. Na koliko se načina putnici mogu razmjestiti u kupeu?*

Rješenje: Putnike na svakoj klupi moguće je razmjestiti na 4! načina. Izabrati putnika koji će sjediti u smjeru vožnje od onih kojima je svejedno moguće je na 3 načina. Ukupno:

$$3 \cdot (4!)^2 \text{ načina.}$$

Primjer 1.32 *Kolektiv ima 24 radnika.*

a) *Na koliko se načina 24 radnika mogu podijeliti na 3 brigade sa po 8 radnika svaka?*

b) *Na koliko je načina od 24 radnika moguće napraviti 8 grupa od po 3 radnika?*

Rješenje:

a) Radnike poredati u vrstu na 24! načina. Uvijek ista osmorica idu u istu brigadu i njihov poredak unutar brigade nije bitan. Nije bitan niti poredak brigada. Traženi broj jednak je
$$\frac{24!}{(8!)^3 \cdot 3!}$$

b) Slično se dobiva
$$\frac{24!}{(3!)^8 \cdot 8!} \text{ načina.}$$

Zadatak 1.33 *Kolika anagrama ima riječ MATEMATIKA?*

Rješenje: $\dfrac{10!}{2!2!3!} = 151200.$

Zadatak 1.34 *Koliko se peteroznamenkastih brojeva može zapisati tako da se znamenka 3 upotrijebi tri, a znamenka 7 dva puta?*

Rješenje: $\dfrac{5!}{3!2!} = 10.$

Zadatak 1.35 *Vrtlar sadi voćke na 100 označenih mjesta. Na koliko načina on može posaditi 25 jabuka, 25 krušaka i 50 šljiva?*

Rješenje: $\dfrac{100!}{(25!)^2 \cdot 50!} = 1.27 \cdot 10^{43}$. Računanje se provodi po Stirlingovoj formuli.

1.4 Varijacije

Neka skup S ima n-elemenata. Svaka uređena r-torka elemenata skupa S naziva se **varijacijom r-tog razreda od n-elemenata** iz skupa S.

1.4.1 Varijacije bez ponavljanja

Svaka uređena r-torka različitih elemenata skupa S od n-elemenata naziva se **varijacijom bez ponavljanja r-tog razreda od n-elemenata** iz skupa S.

Slijedi $1 \leq r \leq n$.

Broj svih varijacija r-tog razreda od n elemenata označavamo sa V_n^r.

Prvu komponentu r-torke možemo izabrati na n načina. Kada je prva komponenta izabrana, drugu je moguće izabrati na $n-1$ načina,..., a ako su izabrane prva, druga, ..., $(r-1)$-va komponenta, onda se r-ta komponenta može izabrati na $n-r+1$ načina.

Po teoremu o uzastopnom prebrojavanju slijedi

$$V_n^r = n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1). \tag{4}$$

Množenjem i dijeljenjem (4) izrazom $(n-r)!$ dobiva se

$$V_n^r = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1) \cdot (n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Kalkulator ima program nPr koji računa varijacije bez ponavljanja V_n^r .

Primjer 1.36 *Za skup $S = \{1,2,3\}$ napisati varijacije bez ponavljanja svih mogućih razreda.*

Rješenje:

- Varijacije prvog razreda su

$$1 \quad 2 \quad 3 \qquad \text{i} \quad V_3^1 = \frac{3!}{2!} = 3;$$

- Varijacije drugog razreda su

$$\begin{matrix} 12 & 21 & 31 \\ 13 & 23 & 32 \end{matrix} \qquad \text{i} \quad V_3^2 = \frac{3!}{1!} = 6$$

- Varijacije trećeg razreda su permutacije $V_3^3 = 3! = P_3$.

Primjer 1.37 *Na koliko načina šest osoba može posjesti četiri mjesta u jednom redu?*

Rješenje:
Na $V_6^4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ različitih načina.

Zadatak 1.38 *Ispišite sve varijacije trećeg razreda skupa $S = \{1, 2, 3, 4\}$.*

Rješenje:

$$\begin{array}{c} 123 \\ 124 \\ \vdots \\ 142 \\ 143, \end{array}$$

pa ih je zaista

$$\frac{4!}{1!} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$$

Zadatak 1.39 *Koliko se četveroznamenkastih brojeva s različitim znamenkama može napisati znamenkama $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$*

Rješenje:

$$V_6^4 = \frac{8!}{(8-4)!} = 1680$$

Zadatak 1.40 *Koliko se šifri može sastaviti od 7 različitih slova abecede?*

Rješenje:

$$30 \cdot 29 \cdot 28 \ldots \cdot 24 = \frac{30!}{23!} = 10,260.432$$

načina.

Zadatak 1.41 *Na atletskom natjecanju sudjelovalo je 14 dugoprugaša. Medalje (zlatnu, srebrnu i brončanu) osvajaju samo prva tri plasirana natjecatelja. Na koliko se načina mogu podijeliti medalje?*

Rješenje: Zlatnu može dobiti teoretski bilo koji od njih 14. Nakon toga, srebrnu dobiva netko od 13 i brončanu nakon prve dvije netko od 12 preostalih:

$$14 \cdot 13 \cdot 12 = 2184$$

Zadatak 1.42 *Ishod nogometnog prvenstva je tablica s poredanih 12 klubova.*

a) Koliko ima različitih ishoda?

b) Koliko je različitih oklada ako se kladi na tri prvoplasirana i na dva koja će ligu napustiti?

Rješenje:

a) $12! = 479,001.600$

b) $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \dfrac{9 \cdot 8}{2} = 47520$

1.4.2 Varijacije s ponavljanjem

Svaka uređena r-torka elemenata skupa S od n elemenata, pri čemu dopuštamo da se isti element ponovi po volji mnogo puta, naziva se **varijacijom r-tog razreda s ponavljanjem od n elemenata** skupa S.

Označimo njihov broj sa $\overline{V}_n^r$

Prvu komponentu r-torke možemo izabrati na n načina. Kada je prva komponenta izabrana, druga komponenta se može izabrati opet na n načina, jer smije biti ponovljena prva komponenta. Svaka daljna komponenta može se opet i opet birati na n načina.

Slijedi da je broj varijacija r-tog razreda s ponavljanjem od n elemenata skupa S jednak

$$\overline{V}_n^r = n^r$$

Primjer 1.43 *Napisati sve varijacije s ponavljanjem prvog, drugog i trećeg razreda skupa $S = \{1, 2\}$.*

Rješenje:

- Za $r = 1$

$$1 \quad 2 \qquad \text{i} \quad \overline{V}_2^1 = 2^1 = 2.$$

- Za $r = 2$

$$\begin{matrix} 11 & 21 \\ 12 & 22 \end{matrix} \qquad \text{i} \quad \overline{V}_2^2 = 2^2 = 4$$

- Za $r = 3$ dobiva se

$$\begin{matrix} 111 & 211 \\ 112 & 212 \\ 121 & 221 \\ 122 & 222 \end{matrix} \qquad \text{i} \quad \overline{V}_2^3 = 2^3 = 8$$

Varijacija s ponavljanjem r-tog razreda od n elemenata je svaka uređena r-torka elemenata iz skupa S, $k(S) = n$.

Primjer 1.44 *Koliko se četveroznamenkastih brojeva može napisati od znamenaka $\{1, 2, 4, 6, 7, 8\}$?*

Rješenje: Traženih brojeva ima

$$\overline{V}_6^4 = 6^4 = 1296.$$

Primjer 1.45 *Bacaju se dvije kocke. Koliki je broj ishoda?*

Rješenje: Svaki je ishod oblika (i, j) gdje su $i, j = 1, \ldots, 6$. Ishoda ima:

$$6^2 = 36.$$

Primjer 1.46 *U gradu je n semafora. Svaki semafor može svijetliti crveno, žuto ili zeleno.*

a) *Na koliko načina mogu svi semafori svijetliti u određenom trenutku?*

b) *Na koliko načina može svijetliti n semafora, ako je k od njih za pješake (svijetle crveno ili zeleno)?*

Rješenje:

a) Ako svaki može svijetliti na tri načina, ukupno je 3^n načina.

b) Ako je k pješačkih, onda je $n - k$ vozačkih, pa je ukupno $2^k \cdot 3^{n-k}$ načina.

Zadatak 1.47 *Lokot na šifru ima 4 koluta s po 10 znamenaka. Koliko je mogućih šifri?*

Rješenje: $\overline{V}_{10}^{4} = 10^4$.

Zadatak 1.48 *Na koliko se načina može popuniti listić sportske prognoze, ako ima trinaest parova, a za svaki par se može predvidjeti jedan od tri tipa: 1,2 ili X?*

Rješenje: Na $3^{13} = 1594323$ načina.

Zadatak 1.49 *Koliko bi se ljudi teoretski moglo razlikovati po zubima koji im nedostaju, ako odrasli čovjek ima 32 zuba?*

Rješenje: $2^{32} = 4,294,967.296$ ljudi.

Zadatak 1.50 *U sobi je na lusteru 6 žaruljica. Na koliko načina može luster svijetliti?*

Rješenje: Broj različitih osvjetljenja je $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 64$.

Zadatak 1.51 *Koliko skup od 4 elementa ima različitih podskupova?*

Rješenje: Za svaki element skupa moguće je odabrati da li je u podskupu ili ne: 2^4 podskupova.

Zadatak 1.52 *Koliko skup od n elemenata ima različitih podskupova?*

Rješenje: $2^n = 2^{kS}$.

Zadatak 1.53 *Netko je u Zagreb s milijun stanovnika donio vrlo zanimljivu vijest. Nakon 10 minuta, on je tu vijest priopćio dvojici; svaki od te dvojice je vijest nakon 10 minuta priopćio novoj dvojici sugrađana, sve dok nisu svi saznali. Nakon koliko vremena će vijest znati svi Zagrepčani?*

Rješenje: Nakon $10k$ minuta vijest će znati (Matematika II!)

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1 \qquad \text{ljudi.}$$

Nejednadžba

$$2^{k+1} - 1 > 10^6$$

daje

$$k > 18.$$

Nakon $10 \cdot 19 = 190min = 3h$ i $10min$ svi će znati.

1.5 Kombinacije

1.5.1 Kombinacije bez ponavljanja

Neka je S skup od n elemenata.

Svaki podskup od r **elemenata** skupa S ($r \leq n$) naziva se **kombinacijom bez ponavljanja** (ili kraće kombinacija) r**-tog razreda od** n **elemenata** skupa S.

Broj svih kombinacija označava se sa K_n^r.

Tada je broj kombinacija

$$K_n^r = \frac{V_n^r}{r!},$$

jer poredak u podskupu od r elemenata nije bitan.

Dakle, računanje se provodi po formuli za binomne koeficijente

$$K_n^r = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} = \binom{n}{r}.$$

Za binomne koeficijente vrijede relacije:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \qquad \text{i} \qquad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Za računanje pogodna je formula

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdots r}.$$

Primjerice, računamo:

$$\binom{100}{98} = \binom{100}{2} = \frac{100 \cdot 99}{1 \cdot 2} = 4950.$$

Zadatak 1.54 *Izračunajte:*
a) $\binom{7}{2}$*; b)*$\binom{7}{5}$*; c)*$\binom{101}{99}$*; d)*$\binom{1001}{1000}$

Rješenja: a) 21; b) 21; c) 5050; d) 500500

Na kalkulatoru postoji tipka nCr kojom se računaju binomni koeficijenti.

Primjer 1.55 *Napisati kombinacije razreda* $r < 4$ *skupa* $S = \{a, b, c, d\}$.

Rješenje:

- Ako je $r = 1$, kombinacije glase

$$\{1\},\ \ \{2\},\ \ \{3\},\ \ \{4\}, \qquad \text{pa je} \quad K_4^1 = \binom{4}{1} = 4.$$

- Ako je $r = 2$, onda su to

$$\{1,2\},\ \ \{1,3\},\ \ \{1,4\},\ \ \{2,3\},\ \ \{2,4\},\ \ \{3,4\}, \qquad \text{pa je} \quad K_4^2 = \binom{4}{2} = 6.$$

- Ako je $r = 3$, tada su to

$$\{1,2,3\},\ \ \{1,2,4\},\ \ \{1,3,4\},\ \ \{2,3,4\}, \qquad \text{pa je} \quad K_4^3 = \binom{4}{3} = 4.$$

Primjer 1.56 *Košarkaški trener prijavi momčad od 11 igrača. Koliko različitih petorki može poslati na parket?*

Rješenje: Budući na parketu raspored košarkaša nije bitan broj petorki je

$$K_{11}^5 = \binom{11}{5} = \frac{11!}{5! \cdot 6!} = 462 \quad \text{načina.}$$

Primjer 1.57 *Iz špila od 52 igraće karte na slučajan način izvlačimo 8 karata. Na koliko načina možemo izvući:*

a) točno 3 asa

b) barem 3 asa

Rješenje:

a) Za izvući 3 asa od 4, ima $\binom{4}{3}$ mogućnosti, a preostalih 5 karata odabire se od onih koji nisu asevi na $\binom{48}{5}$ načina. Po teoremu o uzastopnom prebrojavanju, ukupan broj načina iznosi $\binom{4}{3} \cdot \binom{48}{5}$.

b) Barem tri asa znači tri ili četiri asa u osam izvučenih. Nemoguće je odjednom izvući 3 i 4 asa, pa je ukupan broj zbroj pojedinačnih slučajeva: $\binom{4}{3} \cdot \binom{48}{5} + \binom{4}{4} \cdot \binom{48}{4}$.

Zadatak 1.58 *Na tulumu su odlučili igrati mini-loto. Uzeli su* 10 *biljarskih kugli i izvlačili pet. Koliko je bilo kombinacija? Da li bi bilo više kombinacija da se izvlače tri kuglice?*

Rješenje: Broj kombinacija je $\frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252$. Ne bi.

Zadatak 1.59 *Koliko kombinacija ima loto 7 od 39, a koliko loto 6 od 45? Da li je lakše dobiti na lotu 10 od 40?*

Rješenja. Kombinacija redom ima: $15,380.937$; $8,145.060$; $847,660.528$.

Zadatak 1.60 *Od 20 kandidata za stolnotenisku momčad, selektor mora izabrati tročlanu reprezentaciju. Na koliko načina može izvršiti izbor?*

Rješenje:

$$\binom{20}{3} = 1140$$

Zadatak 1.61 *Na koliko se načina mogu 3 jednake knjige razdijeliti među 12 učenika, tako da svaki učenik dobije najviše jednu knjigu?*

Rješenje: Od 12 učenika izaberu se trojica koji dobivaju knjigu:

$$\binom{12}{3} = 1320$$

načina.

Zadatak 1.62 *Na maturalnoj večeri bilo je 28 učenika jednog razreda. Od toga 16 mladića i 12 djevojaka.*

a) *Koliko parova za ples se može formirati od po jednog mladića i jedne djevojke?*
Rješenje: 192.

b) Na koliko načina mogu na podiju plesati tri para?
Rješenje: *Tri mladića i tri djevojke moguće je odabrati na*

$$\binom{16}{3} \quad i \quad \binom{12}{3}$$

načina, s tim da je kod plesa bitan poredak mladića:

$$\binom{16}{3} \cdot \binom{12}{3} \cdot 3! = 739200.$$

Zadatak 1.63 *Od 100 mobitela, 5 ih je s greškom. Na koliko se načina može odabrati 10 mobitela, tako da među njima bude*

a) svih 10 ispravnih?
Rješenje:

$$\binom{95}{10}$$

b) 1 neispravan?
Rješenje:

$$\binom{95}{9} \cdot \binom{5}{1}$$

c) 4 s greškom?
Rješenje:

$$\binom{95}{6} \cdot \binom{5}{4}$$

d) svih 5 s greškom?
Rješenje:

$$\binom{95}{5}$$

1.5.2 Kombinacije s ponavljanjem

Kombinacija s ponavljanjem r-tog razreda od n elemenata skupa S je svaki multiskup od r elemenata iz S: skup kod kojeg je dozvoljeno ponavljanje svakog elementa iz S po volji mnogo puta.

Broj kombinacija s ponavljanjem r-tog razreda od n elemenata označava se sa $\overline{K}_n^r$ i jednak je

$$\overline{K}_n^r = \binom{n+r-1}{r}.$$

Primjer 1.64 *Napisati kombinacije s ponavljanjem drugog razreda skupa $S = \{1, 2, 3\}$.*

Rješenje: Tražene kombinacije su sljedeći multiskupovi:

$$\begin{array}{ccc} \{11\} & \{22\} & \{33\} \\ & \{12\} & \{23\} \\ & & \{13\} \end{array}$$

Njihov broj po formuli je: $\overline{K}_3^2 = \binom{4}{2} = 6$ kombinacija.

Slično bi bilo postaviti pitanje na koliko načina troje ljudi može podijeliti dvije kovanice od po jednu kunu:

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{array}$$

U ovom slučaju multiskupovi imaju po dva elementa koji simboliziraju kune, a elementi multiskupova se uzimaju iz skupa ljudi

$$\{A, B, C\}$$

kao da se na svaku od kovanica nalijepi ceduljica s oznakom čija je u zadanoj podjeli.

Zadatak 1.65 *Na koliko se načina može pet bombona podijeliti na četvero djece. Pritom svako pojedino dijete može ostati i bez bombona, ali može dobiti i više bombona.*

Rješenje: Prvo dijete dobije nekoliko bombona u vrećici, drugo i treće dijete također, dok četvrto dobiva bombone bez vrećice. Bombone (O) i vrećice (V) moguće je posložiti u niz, primjerice:

$$O \quad O \quad V \quad O \quad V \quad O \quad V \quad O$$

U svaku vrećicu idu bomboni ispred nje. Posljednje dijete dobiva bombone bez vrećice. Različite rasporede dobivamo razmješajem vrećica i bombona, ukupno

$$\binom{5+4-1}{4-1} = \binom{4+5-1}{5} = 56$$

načina, jer je u smislu definicije $n = 4$, a $r = 5$.

Napomena. U prethodnom zadatku radi se o kombinacijama 5-tog razreda (podjela bombona) skupa od 4 elementa (djeca koja su dobila bombon).

Svaku podjelu bombona moguće je promatrati kao multiskup od 5 elemenata uzetih iz skupa djece

$$D = \{1, 2, 3, 4\}$$

kod kojih ne moraju biti uzeta sva četiri elementa iz D i u kojem se neki elementi mogu ponavljati. Jedan od skupova je:

$$P = \{1, 1, 1, 2, 3\}$$

koji simbolizira podjelu

- prvi bombon je dobilo prvo dijete
- drugi bombon je dobilo prvo dijete
- treći bombon je dobilo prvo dijete
- četvrti bombon je dobilo drugo dijete
- peti bombon je dobilo treće dijete

Zadatak 1.66 *Na koliko načina petero ljudi može podijeliti 24 kune?*

Rješenje: Slčno podjeli bombona:

$$\binom{5+24-1}{24} = \binom{24+5-1}{5-1} = 20475.$$

Zadatak 1.67 *Dobavljač naručuje pet istovrsnih proizvoda koji mogu biti ispravni ili neispravni. Na koliko načina je moguć odabir?*

Rješenje: po formuli za $n = 2$ i $r = 5$:

$$\binom{2+5-1}{5} = 6.$$

Zadatak 1.68 *Dobavljač može nabaviti proizvode prve, druge i treće klase. Na koliko načina može, obzirom na kvalitetu, naručiti tri proizvoda?*

Rješenje: $\binom{3+3-1}{3} = 10.$

Zadatak 1.69 *U koliko različitih ekipa može ući četiri učenika za tri igre, koje igraju jednu za drugom, ako redoslijed sudjelovanja u igrama ne znači novu ekipu, ako*

a) svaki učenik jedamput sudjeluje u igrama

b) svaki učenik sudjeluje više puta u igrama?

Rješenje:

a) $\binom{4}{3} = 4.$

b) $\binom{4+3-1}{3} = 20.$

Zadatak 1.70 *U nekom restoranu imaju dvije vrste jela na jelovniku.*

a) Na koliko načina pet osoba može naručiti jelo?
Rješenje: $2^5 = 32.$

b) Na koliko se načina može naručiti 5 jela za van ako je moguće birati između dva moguća?
Rješenje: $\binom{2+5-1}{5} = 6.$

1.6 Zadaci iz kombinatorike

1. Neka su zadane znamenke 2, 3, 5 i 8. Koliko se od njih može napisati:
   a) četveroznamenkastih brojeva
   b) četveroznamenkastih brojeva kojima su sve znamenke različite
   c) šesteroznamenkastih brojeva
   d) dvoznamenkastih brojeva s različitim znamenkama
2. Koliko ima različitih karata za putovanje prugom na kojoj je 10 stanica?
3. Koliko ima željezničkih postaja na jednoj pruzi ako za putovanja tom prugom postoji 4160 vrsta voznih karata?
4. Na koliko se načina između 10 muškaraca i 10 žena mogu izabrati dva muškarca i tri žene?
5. Na koliko se načina može razdijeliti 12 karata među 3 osobe, tako da:
   a) prva dobije 5, druga 4, a treća 3 karte?
   b) nije određen broj karata koji će dobiti svaka pojedina osoba?
6. Koliko ima različitih dijeljenja kod "Bele u četvero"?
7. Između 100 proizvoda ima 15 oštećenih. Na koliko načina možemo izabrati 10 proizvoda tako da ih barem osam bude neoštećeno?
8. U skupu od 50 proizvoda nalazi se 40 ispravnih, a ostali su neispravni. Na koliko se načina može izabrati uzorak od 5 proizvoda, ali tako da u njemu budu 3 ispravna i 2 neispravna?
9. Od 7 žena i 4 muškarca treba izabrati delegaciju. Na koliko se načina može izabrati delegacija ako se ona sastoji od
   a) petero ljudi i to tri žene i dva muškarca,
   b) bilo kojeg broja ljudi ali da je jednak broj žena i muškaraca u delegaciji,
   c) petero ljudi od kojih su barem dvije žene,
   d) petero ljudi s tim da jedno od njih bude već unaprijed određena žena,
   e) šestero ljudi, po troje od oba spola, ali u jednoj delegaciji ne mogu biti zajedno jedan muškarac i jedna žena za koje se zna da se ne podnose?
10. Student mora u roku od 8 dana položiti četiri ispita.
    a) Na koliko to načina može učiniti?

b) Na koliko načina ih može položiti ako u jednom danu može položiti najviše jedan ispit?

c) Koliko je načina, ako posljednji odluči položiti zadnji dan?

d) Isto kao u c), ali da u danu ne položi više od jednog ispita?

11. Šest muškaraca i pet žena moraju stati u red tako da se u redu izmjenjuju. Na koliko je načina moguće konstruirati takav red?

12. Na zasijedanju nekog studentskog udruženja prisustvuje 52 studenata, po 13 studenata sa svakog od četiri fakulteta. Predsjedništvo udruženja ima četiri člana, tako da u njemu budu predstavnici barem tri fakulteta. Koliko ima različitih predstavništava?

1.6.1 Rješenja zadataka iz kombinatorike

1. a) $\overline{V}_4^4 = 4^4$

   b) $P_4 = 4!$

   c) $\overline{V}_4^6 = 4^6$

   d) $V_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!}$

2. Svaka je karta određena s dvije stanice:

$$V_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$$

različitih karata.

Napomena: ako gledamo karte po cijeni i ako cijena ovisi samo o početnoj i ciljnoj stanici, tada je to

$$K_{10}^2 = \binom{10}{2} = 45$$

karata, duplo manje od prethodnog broja.

3. Iz $V_n^2 = n(n-1) = 4160$ izlazi jedino moguće $n = 65$.

4.
$$K_{10}^2 \cdot K_{10}^3 = \binom{10}{2} \cdot \binom{10}{3} = 5400$$

načina izbora.

5. a)
$$K_{12}^5 \cdot K_7^4 \cdot K_3^3 = \binom{12}{5} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{3} = 27720$$

   b)
$$\overline{K}_3^{12} = \binom{3+12-1}{12} = 91$$

6.
$$\binom{32}{8} \cdot \binom{24}{8} \cdot \binom{16}{8} \cdot \binom{8}{8} \approx 10^{16}.$$

7.
$$\binom{85}{8}\cdot\binom{15}{2}+\binom{85}{9}\cdot\binom{15}{1}+\binom{85}{10}.$$

8.
$$\binom{40}{3}\cdot\binom{10}{2}=444600.$$

9. a)
$$\binom{7}{3}\cdot\binom{4}{2}=210.$$

b)
$$\binom{7}{1}\cdot\binom{4}{1}+\binom{7}{2}\cdot\binom{4}{2}+\binom{7}{3}\cdot\binom{4}{3}+\binom{7}{4}\cdot\binom{4}{4}=329.$$

c)
$$\binom{11}{5}-\binom{7}{1}\cdot\binom{4}{4}=455.$$

d)
$$\binom{10}{4}=210.$$

e)
$$\binom{11}{5}-\binom{6}{2}\cdot\binom{3}{2}=417.$$

10. a)
$$8^4=4096$$

b)
$$8\cdot 7\cdot 6\cdot 5=1680.$$

c)
$$8^3\cdot 4=2048$$

d)
$$7\cdot 6\cdot 5\cdot 4=840.$$

11.
$$6!\cdot 5!=86400.$$

12.
$$\binom{13}{1}^4+4\cdot 3\cdot\binom{13}{1}^2\cdot\binom{13}{2}=186745,$$

jer na četiri načina možete izabrati onoga koji nema predstavnika, dok na tri načina može biti izabran fakultet s dva predstavnika.

1.7 Binomni poučak

Teorem 2 *Neka su $a, b \in \mathbf{R}$ (ili $\mathbf{C}$) i $n \in \mathbf{N}$. Tada vrijedi*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \tag{5}$$

Binomna formula je izraz (5), a koeficijente u izrazu za potenciranje binoma nazivamo binomni koeficijenti.

Primjer 1.71 *U izrazu*

$$(1+x)^{30}$$

odredite koeficijent uz x^{20}.

Rješenje: Traženi koeficijent je

$$\binom{30}{20} = 30,045.015.$$