6

Neprekidne slučajne varijable

Definicija. Slučajna varijabla X na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je **neprekidna slučajna varijabla** ako postoji funkcija $f\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty\rangle$ takva da je

$$\mathbb{P}(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)\, dt, \quad \text{za sve } a \in \mathbb{R}.$$

Funkciju f se zove **funkcija gustoće** slučajne varijable X.
Napomena.

(a) Može se pokazati da je

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_{B} f(t)\, dt, \text{ za izmjerivi podskup } B \subseteq R.$$

Npr.

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(t)\, dt, \text{ za } a, b \in \mathbb{R},\ a < b.$$

(c) Za $B = \mathbb{R}$ iz (a) slijedi

$$1 = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt.$$

Dakle, da bi f bila funkcija gustoće neke neprekidne slučajne varijable, mora vrijediti:

- $f(x) \geq 0$, za sve $x \in \mathbb{R}$,
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$.

(d) Vrijedi

$$\mathbb{P}(X = a) = \int_{a}^{a} f(t)\, dt = 0 \text{ pa je}$$

$$\mathbb{P}(X \leq a) = \mathbb{P}(X < a) + \mathbb{P}(X = a) = \mathbb{P}(X < a) + 0 = \mathbb{P}(X < a)$$

i slično je

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(a < X \leq B) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a < X < b).$$

(d) Ako je f neprekidna funkcija, onda je

$$\mathbb{P}(x \leq X \leq x + \Delta x) = \int_x^{x+\Delta X} \underbrace{f(t)}_{\approx f(x)} \, dt \approx f(x)\Delta x \text{ za male } \Delta x.$$

Definicija. **Funkcija distribucije** neprekidne slučajne varijable X je definirana sa

$$F(x) := \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Napomena.

(a) Ako je f neprekidna, onda je

$$f = F'.$$

(b) Vrijedi:

$$F(-\infty) := \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0,$$
$$F(+\infty) := \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

Zadatak 6.1 Neka je X neprekidna slučajna varijabla s gustoćom

$$f(x) = \begin{cases} c(4x - 2x^2), & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

(a) Odredite c.

(b) Izračunajte $\mathbb{P}(X > 1)$.

Rješenje:
(a) Mora vrijediti:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = c \int_0^2 (4x - 2x^2)\, dx = c(2x^2 - \frac{2}{3}x^3)\Big|_0^2 = \frac{8c}{3}$$

pa je $c = \frac{3}{8}$.
(b)

$$\mathbb{P}(X > 1) = \int_1^{\infty} f(x)\, dx = \frac{3}{8} \int_1^2 (4x - 2x^2)\, dx = \frac{3}{8}(2x^2 - \frac{2}{3}x^3)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}.$$

△

Definicija. Neka je X neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f. **Matematičko očekivanje** slučajne varijable X je definirano sa

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx,$$

ukoliko gornji integral apsolutno konvergira.
Napomena. Općenito, za funkciju $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vrijedi

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx,$$

ukoliko gornji integral apsolutno konvergira. Tako je **varijanca** slučajne varijable X definirana sa

$$\mathrm{Var}X := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}X)^2 f(x)\, dx.$$

Zadatak 6.2 Slučajna varijabla X ima neprekidnu **uniformnu razdiobu** na intervalu $\langle a, b\rangle$ i pišemo $X \sim U(a,b)$ ako joj je funkcija gustoće

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Odredite očekivanje, varijancu i funkciju distribucije slučajne varijable X.

Rješenje:

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$\mathrm{Var}X = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(a-b)^2}{12}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \begin{cases} 0, & x < a \\ \int_a^x \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ \int_a^b \frac{1}{b-a}\, dt, & x > b \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

△

Zadatak 6.3 Slučajna varijabla X ima **eksponencijalnu razdiobu** s parametrom $\lambda > 0$ i pišemo $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ ako joj je funkcija gustoće

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Odredite očekivanje, varijancu i funkciju distribucije slučajne varijable X.

Rješenje:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda}\,dx = -xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\,dx = 0 + \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{\lambda} \\ \mathbb{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \ldots = \frac{2}{\lambda^2} \\ \mathrm{Var}X &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = (*)$$

1. $x < 0$

$$(*) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0;$$

2. $x \geq 0$

$$(*) = \int_0^{x} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = -e^{-\lambda x}\Big|_0^{x} = 1 - e^{-\lambda x}$$

pa je

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

△

Zadatak 6.4 Pretpostavite da slučajna varijabla ima funkciju distribucije

$$F(x) = C - e^{-x^2},\ x > 0.$$

(a) Odredite C.

(b) Izračunajte $\mathbb{P}(X > 2)$ i $\mathbb{P}(1 < X < 3)$.

(c) Odredite funkciju gustoće f.

(d) Izračunajte $\mathbb{E}X$.

Rješenje:

(a) $1 = \lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty}(C - e^{-x^2}) = C \implies C = 1.$

(b) $\mathbb{P}(X > 2) = 1 - \mathbb{P}(X \le 2) = 1 - F(2) = 1 - (1 - e^{-2^2}) = e^{-4}$
$\mathbb{P}(1 < X < 3) = \mathbb{P}(\{X < 3\} \setminus \{X \le 1\}) = \mathbb{P}(X < 3) - \mathbb{P}(X \le 1) = \mathbb{P}(X \le 3) - \mathbb{P}(X \le 1) = F(3) - F(1) = (1 - e^{-3^2}) - (1 - e^{-1^2}) = e^{-1} - e^{-9}$

(c)

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_0^\infty x \cdot 2xe^{-x^2}\,dx = 2\int_0^\infty x^2 e^{-x^2}\,dx = \\
&= -xe^{-x^2}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{rr} & x = \frac{y}{\sqrt{2}} \\ \implies & dx = \frac{dy}{\sqrt{2}} \end{array} \right\} = \\
&= 0 + \int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}\,\frac{dy}{\sqrt{2}} = \sqrt{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = \sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2},
\end{aligned}$$

gdje smo iskoristili

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = 1.$$

△

Slučajna varijabla X ima **normalnu razdiobu** s parametrima $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma^2 > 0$ i pišemo $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ ako joj je funkcija gustoće

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}.$$

Zadatak 6.5 Nađite distribuciju slučajne varijable

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

Rješenje:
Računamo:

$$
\begin{aligned}
F_Z(x) &= \mathbb{P}(Z \leq x) = \mathbb{P}(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq x) = \mathbb{P}(X \leq \mu + \sigma x) = \\
&= \int_{-\infty}^{\mu+\sigma x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \left\{ \Longrightarrow \begin{array}{c} y = \frac{x-\mu}{\sigma} \\ dx = \frac{dy}{\sigma} \end{array} \right\} = \\
&= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, \sigma\, dy = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy
\end{aligned}
$$

pa je Z neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće

$$
f_Z(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, y \in \mathbb{R},
$$

odnosno $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$.

$\triangle$

Napomena. Ako je $X \sim \mathrm{N}(0,1)$, onda je

$$
F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \Phi(x)
$$

i Φ čitamo iz tablice.

Zadatak 6.6 Neka je $X \sim \mathrm{N}(0,1)$. Odredite $\mathbb{E}X$ i $\mathrm{Var}X$.

Rješenje:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0 \\
\mathrm{Var}X &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}[X^2] - 0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-x e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [0 + \sqrt{2\pi}] = 1
\end{aligned}
$$

$\triangle$

Zadatak 6.7 Neka je $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Odredite $\mathbb{E}X$ i $\mathrm{Var}X$.

Rješenje:
Iz zadatka 5.13 slijedi da je

$$
Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0,1)
$$

pa iz zadatka 6.6 slijedi

$$0 = \mathbb{E}Z = \mathbb{E}\left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sigma}\mathbb{E}X - \frac{\mu}{\sigma} \qquad \Longrightarrow \mathbb{E}X = \mu$$
$$1 = \text{Var}Z = \text{Var}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}\text{Var}X \qquad \Longrightarrow \mathbb{E}X = \sigma^2$$

△

Zadatak 6.8 Vijek trajanja neke automobilske gume je normalno distribuiran s očekivanjem 34 000 km i standardnom devijacijom od 4 000 km.

(a) Izračunajte vjerojatnost da guma traje više od 40 000 km.

(b) Ako je guma prešla 30 000 km, izračunajte vjerojatnost da će guma trajati još 10 000 km.

Rješenje:
X =vijek trajanja gume $\Longrightarrow$ $X \sim$N$(34000, 4000^2)$
$\mu = 34000$, $\sigma = 4000$
Zadatak 5.13 $\Longrightarrow$ $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim$N$(0,1)$

(a)

$$\mathbb{P}(X > 40000) = \mathbb{P}(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{40000-\mu}{\sigma}) = \mathbb{P}(Z > 1.5)$$
$$= 1 - \Phi(1.5) = 1 - 0.9333 = 0.0668$$

(b)

$$\mathbb{P}(X > 40000 | X > 30000) = \frac{\mathbb{P}(X > 40000, X > 30000)}{\mathbb{P}(X > 30000)} = \frac{\mathbb{P}(X > 40000)}{\mathbb{P}(X > 30000)} = (*)$$
$$\mathbb{P}(X > 30000) = \mathbb{P}(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{30000-\mu}{\sigma})$$
$$= \mathbb{P}(Z > -1) = 1 - \Phi(-1) = \Phi(1) = 0.8413$$
$$\Longrightarrow (*) = \frac{0.0668}{0.8413} = 0.0794$$

△

Zadatak 6.9 Pretpostavite da je vrijeme putovanja nekog studenta od kuće do fakulteta približno normalno distribuirano s očekivanjem 40 minuta i standardnom devijacijom od 7 minuta. Student želi stići na predavanje koje počinje u 12:15 sati.

(a) Ako je student krenuo od kuće u 11:40, izračunajte vjerojatnost da on zakasni na predavanje.

(b) Kada bi student trebao krenuti od kuće da s vjerojatnošću od barem 0.95 bude siguran da će stići na vrijeme na predavanje?

Rješenje:
X =vrijeme putovanja $\implies X \sim$N$(40, 7^2)$

(a) $\mathbb{P}(X > 35) = \mathbb{P}(\frac{X-40}{7} > \frac{35-40}{7}) = \mathbb{P}(\frac{X-40}{7} > -0.7142) = 1 - \Phi(-0.7142) = \Phi(0.7142) = 0.7611$

(b) Tražimo a takav da je $0.95 \leq \mathbb{P}(X \leq a) = \mathbb{P}(\frac{X-40}{7} \leq \frac{a-40}{7}) = \Phi(\frac{a-40}{7})$, odakle slijedi
$$\frac{a-40}{7} \geq 1.64 \implies a \geq 51.48.$$
Dakle, student bi trebao krenuti 51.48 minuta prije, tj. otprilike u 11 sati 23 min i 30 s.

$\triangle$

Zadatak 6.10 Autobus dolazi na stanicu svakih 15 minuta počevši od 7:00 ujutro. Ako neki putnik dolazi na stanicu u neko slučajno vrijeme između 7:00 i 7:30, izračunajte da on čeka autobus

(a) manje od 5 minuta,

(b) više od 10 minuta.

Rješenje:
X =vrijeme kada putnik stiže na stanicu $\implies X \sim$U$(0, 30)$

(a) $\mathbb{P}(X \in \langle 10, 15\rangle \cup \langle 25, 30\rangle) = \mathbb{P}(10 < X < 15) + \mathbb{P}(25 < X < 30) = \int_{10}^{15} \frac{dx}{30} + \int_{25}^{30} \frac{dx}{30} = \frac{1}{3}$

(b) $\mathbb{P}(X \in \langle 0, 5\rangle \cup \langle 15, 20\rangle) = \mathbb{P}(0 < X < 5) + \mathbb{P}(15 < X < 20) = \int_{0}^{5} \frac{dx}{30} + \int_{15}^{20} \frac{dx}{30} = \frac{1}{3}$

$\triangle$

Zadatak 6.11 Neka je $X \sim$ Exp(λ). Pokažite da X ima svojstvo **memorijske odsutnosti**:
$$\mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t),\ s,\ t \geq 0.$$

Rješenje:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > s+t|X > s) &= \frac{\mathbb{P}(X > s+t, X > s)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{\mathbb{P}(X > s+t)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} \\ &= e^{-\lambda t} = \mathbb{P}(X > t)\end{aligned}$$

△

Zadatak 6.12 Pretpostavite da je duljina telefonskog poziva u minutama eksponencijalno distribuirana s parametrom $\lambda = \frac{1}{10}$. Ako je netko prije vas došao u telefonsku govornicu, izračunajte vjerojatnost da ćete čekati

(a) više od 10 minuta,

(b) između 10 i 20 minuta.

Rješenje:
X=duljina telefonskog poziva u minutama $\implies X \sim$Exp$(\frac{1}{10})$.
$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = 1 - e^{-\frac{1}{10}\cdot t}$, $t \geq 0$.

(a) $\mathbb{P}(X > 10) = 1 - F_X(10) = 1 - e^{-\frac{1}{10}\cdot 10} = 1 - e^{-1} = 0.368$

(b) $\mathbb{P}(10 < X < 20) = F_X(20) - F_X(10) = e^{-\frac{1}{10}\cdot 20} - e^{-\frac{1}{10}\cdot 10} = e^{-2} - e^{-1} = 0.233$

△

Zadatak 6.13 Neka je $X \sim \mathrm{N}(70, 4)$. Izračunajte $\mathbb{P}((X - 68)^2 \geq 9)$.

Rješenje:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((X-68)^2 \geq 9) &= \mathbb{P}(|X-68| \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(|X-68| < 3) = \\ &= 1 - \mathbb{P}(-3 < X - 68 < 3) = 1 - \mathbb{P}(65 < X < 71) = \\ &= \mathbb{P}(\frac{65-70}{2} < \frac{X-70}{2} < \frac{71-70}{2}) \\ &= 1 - (\Phi(0.5) - \Phi(-2.5)) = 1 - (\Phi(0.5) - (1 - \Phi(2.5))) = \\ &= 1 - (0.6915 - 1 + 0.9938) = 0.3147\end{aligned}$$

△

Zadatak 6.14 Neka je $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Izračunajte:

(a) $\mathbb{P}(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma)$,

(b) $\mathbb{P}(X^2 - 2\mu X \geq \sigma^2 - \mu^2)$.

Rješenje:
(a) $\mathbb{P}(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = \mathbb{P}(-3 \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq 3) \approx \Phi(3) - \Phi(-3) = \Phi(3) - (1 - \Phi(3)) = 2\Phi(3) - 1 = 0.9973$
(b) $\mathbb{P}(X^2 - 2\mu X \geq \sigma^2 - \mu^2) = \mathbb{P}((X-\mu)^2 \geq \sigma^2) = \mathbb{P}(\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right| \geq 1) = \mathbb{P}(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq 1) + \mathbb{P}(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq -1) = (1-\Phi(1)) + \Phi(-1) = (1-\Phi(1)) + (1-\Phi(1)) = 2(1-\Phi(1)) = 0.3173$

$\triangle$

Zadatak 6.15 Neka je $X \sim U(0,1)$. Odredite distribuciju slučajne varijable

$$Y = -\frac{1}{\lambda} \ln X,$$

gdje je $\lambda > 0$.

Rješenje:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(-\frac{1}{\lambda} \ln x \leq y) = \mathbb{P}(\ln X \geq -\lambda y) \\ &= \mathbb{P}(X \geq e^{-\lambda y}) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda y}, & y \leq 0 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \end{aligned}$$

Dakle,

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}, & y \leq 0 \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

pa $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$.

$\triangle$

Zadatak 6.16 U pravkutniku stranica duljine 3 cm i 4cm biramo slučajno točku. Izračunajte očekivanu udaljenost točke od najbliže stranice pravokutnika.

Rješenje: Označimo s X udaljenost točke od najbliže stranice pravokutnika. Tada je za $x \in [0, 3/2]$

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - \mathbb{P}(X > x) = 1 - \frac{(4-2x)(3-2x)}{4 \cdot 3} = -\frac{x^2}{3} + \frac{7x}{6}.$$

Odavde je

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -\frac{x^2}{3} + \frac{7x}{6}, & 0 \leq x \leq 3/2 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

pa je

$$f_X(x) = F_X'(x) = (-\frac{2x}{3} + \frac{7}{6}) 1_{[0,3/2]}(x).$$

Odavde je

$$\mathbb{E}X = \int_0^{3/2} x\left(-\frac{2x}{3} + \frac{7}{6}\right) dx = \frac{27}{48} = 0.5625.$$

△

Aproksimacija binomne slučajne varijable

Teorem. (Poisson) Neka je $X_n \sim B(n, p_n)$, $n \in \mathbb{N}$ i $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$ za $0 < \lambda < \infty$ fiksan broj. Tada za svako $k = 0, 1, \ldots, n$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}.$$

△

Teorem najčešće koristimo u obliku:
za velike n ($n \geq 20$) i male p_n ($n \cdot p_n < 10$) je

$$\mathbb{P}(X_n = k) \approx \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_n} \quad , \quad \lambda_n = n \cdot p_n.$$

Zadatak 6.17 U telefonskoj centrali registrirano je 400 korisnika. Svaki korisnik u nekom određenom vremenskom intervalu poziva centralu s vjerojatnošću 0.01. Izračunajte vjerojatnost da je u promatranom vremenskom intervalu
(a) točno 5 korisnika pozvalo centralu,
(b) barem 3 korisnika pozvalo centralu.

Rješenje:

$n = 400$, $p = 0.01$, X =broj korisnika koji pozovu centralu u tom vrem.intervalu $\Rightarrow X \sim B(400, 0.01)$, $\lambda = 400 \cdot 0.01 = 4 < 10$

(a) $\mathbb{P}(X = 5) \approx \frac{4^5}{5!} \cdot e^{-4} \approx 0.156$

(b) $\mathbb{P}(X \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 2) \approx 1 - (1 + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!}) \cdot e^{-\lambda} \approx$
≈ 0.76

△

Zadatak 6.18 U neko je skladište došlo 1000 porculanskih vaza. Vjerojatnost da se neka razbije tijekom transporta od tvornice do skladišta je 0.002. Neovisno o tome neke se vaze razbiju i unutar samog skladišta i to se događa s vjerojatnošću 0.0015 (vaze su u kutijama pa ista vaza može biti dva puta razbijena, ne znamo je li razbijena ili ne dok ne otvorimo kutije). Nađite vjerojatnost da je broj vaza razbijen u ukupnom procesu veći od 3.

Rješenje:

A :={vaza je razbijena u transportu} , B :={vaza je razbijena u skladištu}

Vjerojatnost da je vaza uništena je

$p = \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = 0.002 + 0.0015 - 0.002 \cdot 0.0015 = 0.00349$

X =broj oštećenih vaza $\Rightarrow X \sim B(1000, p)$, $\lambda = 1000 \cdot 0.00349 < 10$.

$\Rightarrow \mathbb{P}(X > 3) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 3) \approx 1 - (1 + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!}) \cdot e^{-\lambda} \approx 0.4627$

$\triangle$

Teorem. (Moivre Laplace) Neka je $0 < p < 1$ i $X_n \sim B(n, p)$. Tada za proizvoljne a,$b \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(a \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Ovo je specijalni slučaj tzv. centralnog graničnog teorema.
$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(\frac{a-np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{X_n-np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{b-np}{\sqrt{npq}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\frac{a-np}{\sqrt{npq}}}^{\frac{b-np}{\sqrt{npq}}} e^{-x^2/2} dx = \Phi(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{a-np}{\sqrt{npq}})$,

gdje je Φ funkcija distirbucije jedinične normalne slučajne varijable.

Zadatak 6.19 Kolika je vjerojatnost da među 1000 novorođenčadi bude barem 490 dječaka, ako je za svako novorođenče jednako vjerojatno da bude dječak ili djevojčica?

Rješenje:

$n = 1000$, $p = \frac{1}{2}$, X =broj dječaka $\Rightarrow X \sim B(1000, \frac{1}{2})$

$np = 500$, $npq = 250$

$\mathbb{P}(490 \leq X \leq 1000) \approx \Phi(\frac{1000-500}{\sqrt{250}}) - \Phi(\frac{490-500}{\sqrt{250}}) = \Phi(31.63) - \Phi(-0.63) =$
$= 1 - 0.2643 = 0.7357$

pri čemu smo koristili da je $\Phi(-0.63) = 1 - \Phi(0.63) = 1 - 0.7357 = 0.2643$.

$\triangle$

Zadatak 6.20 Prosjak dobije novčić od prolaznika s vjerojatnošću 0.05. Koliko prolaznika treba proći ulicom da bi prosjak sakupio barem 150 novčića s vjerojatnošću 0.95?

Rješenje:

n =broj prolaznika , X =broj novčića prosjak skupi $\Rightarrow \quad X \sim B(n, 0.05)$

$np = 0.05 \cdot n = \frac{n}{20}$, $npq = \frac{19 \cdot n}{20 \cdot 20}$

Tražimo n t.d. je

$0.95 \leq \mathbb{P}(X \geq 150) = \mathbb{P}(150 \leq X \leq n) = \Phi(\frac{n-np}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{150-np}{\sqrt{npq}}) =$
$= \Phi(\sqrt{n} \cdot \frac{1-p}{\sqrt{pq}}) - \Phi(\frac{150-\frac{n}{20}}{\sqrt{\frac{19n}{20 \cdot 20}}}) \approx$ za velike $n \approx 1 - \Phi(\frac{3000-n}{\sqrt{19n}})$

$\Rightarrow \quad \Phi(\frac{3000-n}{\sqrt{19n}}) \leq 1 - 0.95 = 0.05 = \Phi(-1.64)$

$\Rightarrow \quad \frac{3000-n}{\sqrt{19n}} \leq -1.64 \Rightarrow \quad n \geq 3429.$

$\triangle$

Vrijedi:

za $\varepsilon > 0$

$\mathbb{P}(|\frac{X}{n} - p| < \varepsilon) = \mathbb{P}(np - n\varepsilon < X < np + n\varepsilon) = \mathbb{P}(\frac{-n\varepsilon}{\sqrt{npq}} < \frac{X-np}{\sqrt{npq}} < \frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}) =$
$= \mathbb{P}(\frac{-\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}} < \frac{X-np}{\sqrt{npq}} < \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}) \approx \Phi(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}) - \Phi(-\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}})$

Zadatak 6.21 Na prijemnom ispitu rješava se 40 zadataka i za svaki su ponuđena 4 odgovora, od kojih je samo jedan točan. Za točno zaokružen odgovor dobije se 15 bodova, a za pogrešno zaokružen se gubi 5 bodova. Kolika je vjerojatnost da se slučajnim odabirom ponuđenih odgovora prođe kvalifikacijski prag od 120 bodova?

Rješenje:

$X =$ broj točno odgovorenih pitanja $\quad \Rightarrow \quad X \sim B(40, \frac{1}{4})$

$Y =$ broj ostvarenih bodova $= 15 \cdot X - 5 \cdot (40 - X) = 20 \cdot X - 200$

$\mathbb{P}(Y \geq 120) = \mathbb{P}(20X - 200 \geq 120) = \mathbb{P}(X \geq 16) = \mathbb{P}(16 \leq X \leq 40) \approx$
$\approx 1 - \Phi(\frac{16-40 \cdot \frac{1}{4}}{\sqrt{40 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}}}) = 0.0143$

$\triangle$

Zadatak 6.22 Kazalište koje prima 529 gledatelja ima dva ulaza i pored svakoga se nalazi jedna garderoba s n vješalica za kapute. Ako posjetitelji ulaze nezavisno jedan od drugoga i jednako vjerojatno na oba ulaza, koliki je najmanji n t.d. s vjerojatnošću 0.95 bude mjesta kapute svih posjetitelja baš u onoj garderobi pored ulaza na koji je taj posjetitelj ušao?

Rješenje:

$X =$ broj posjetitelja koji su ušli na prvi ulaz $\quad \Rightarrow \quad X \sim B(529, \frac{1}{2})$

Da bi bilo mjesta, mora vrijediti: $\quad 529 - n \leq X \leq n$, tj.

$0.95 \leq \mathbb{P}(529 - n \leq X \leq n) \approx \Phi(\frac{n-529\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{529\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}) - \Phi(\frac{529-n-529\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{529\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}) =$
$= \Phi(\frac{n-529\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{529\cdot\frac{1}{2}}}) - \Phi(-\frac{n-529\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{529\cdot\frac{1}{4}}}) = 1 - 2\cdot\Phi(-\frac{n-529\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{529\cdot\frac{1}{4}}})$
$\Rightarrow \quad -\frac{2n-529}{\sqrt{529\cdot\frac{1}{4}}} \leq -1.96 \quad \Rightarrow \quad n \geq 287.4$

△

Zadatak 6.23 Simetričnu kocku bacamo 4500 puta. Odredite interval u kojem možemo s vjerojatnošću 0.9 očekivati relativnu frekvenciju šestica.

Rješenje:

$n = 4500$, $p = \frac{1}{6}$, $X =$broj šestica koje padnu=frekvencija šestica
$\Rightarrow X \sim B(4500, \frac{1}{6})$, $\frac{X}{n} =$relativna frekvencija šestica

Tražimo $\varepsilon > 0$ t.d.

$$0.9 \leq \mathbb{P}(|\frac{X}{n} - p| < \varepsilon) \approx 1 - 2\cdot\Phi(-\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{n}{pq}})$$

$\Rightarrow \quad \Phi(-\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{n}{pq}}) \leq 0.05 = \Phi(-1.64)$

$\Rightarrow \quad \varepsilon\cdot\sqrt{\frac{n}{pq}} \geq 1.64 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \geq \frac{1.64\cdot 0.3726}{\sqrt{4500}} = 0.0091$

$\Rightarrow \quad$ traženi interval je $< p - \varepsilon, p + \varepsilon > = < 0.1575, 0.1757 >$.

△

Zadaci za vježbu

6.24 Neka je X neprekidna slučajna varijabla s gustoćom

$$f(x) = \begin{cases} cx^n, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

(a) Odredite c.

(b) izračunajte $\mathbb{P}(X > x)$, za $0 < x < 1$.

6.25 Neprekidna slučajna varijabla X ima funkciju gustoće

$$f(x) = \begin{cases} ax + bx^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

i vrijedi $\mathbb{E}X = 0.5$.

(a) Izračunajte $\mathbb{P}(X < 0.5)$.

(b) Izračunajte $\mathrm{Var}X$.

6.26 Na nekom ispitu su bodovi normalno distribuirani s očekivanjem 76 i standardnom devijacijom 15. Najboljih 15 % studenata dobije ocjenu 5, a najlošijih 10 studenata ocjenu 1. Nađite:

(a) najmanji broj bodova potreban za ocjenu 5,

(b) najmanji broj bodova potreban za prolaz.

6.27 Neka je $X \sim \mathrm{N}(0,1)$. Pokažite da za $a \in \mathbb{R}$ vrijedi:

(a) $\mathbb{P}(X > a) = \mathbb{P}(X < -a)$,

(b) $\mathbb{P}(|X| > a) = 2\mathbb{P}(X > a)$,

(c) $\mathbb{P}(|X| < a) = 2\mathbb{P}(X < a) - 1$.

6.28 Neprekidna slučajna varijabla ima jediničnu **Cauchyevu razdiobu** ako joj je gustoća

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Postoji li $\mathbb{E}X$?

(b) Pokažite da $Y = \frac{1}{X}$ također ima jediničnu Cauchyevu razdiobu.

6.29 Ako je X normalna slučajna varijabla s očekivanjem 5 i takva da je $\mathbb{P}(X > 9) = 0.2$, izračunajte Var$X$.

6.30 Godišnje padaline (u cm) u nekom području su normalno distribuirane s očekivanjem 40 i standardnom devijacijom 4. Izračunajte vjerojatnost da će trebati barem 10 godina da količina padalina prijeđe 50 cm.

6.31 Zadana je funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable X:

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot x^2 \cdot e^{-a \cdot x} & \text{ako je } x > 0 \\ 0 & \text{ako je } x \leq 0 \end{cases}$$

Odredite c i izračunjate vjerojatnost da X poprimi vrijednosti u intervalu $\langle 0, \frac{1}{a} \rangle$.

6.32 Neki čovjek čeka na stanici vlak. Vrijeme u minutama koje provede čekajući je slučajna varijabla s funkcijom distribucije

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2} \cdot x, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{4} \cdot x, & 2 \leq x \leq 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}$$

Odredite funkciju gustoće i nađite vjerojatnost da čovjek do dolaska vlaka čeka između 1 i 3 minuta. Također odredite vjerojatnost da čovjek čeka do dolaska vlaka više od 3 minute ako znamo da već stoji na stanici više od 1 minute .

6.33 Slučajna varijabla ima gustoću

$$f(x) = (\alpha - 1)x^{-\alpha}, \ x \geq 1,$$

gdje je $\alpha > 1$ konstanta. Izračunajte $\mathbb{E}X$.

6.34 Pretpostavimo da X ima jediničnu normalnu razdiobu. Izračunajte $\mathbb{E}[e^{t\,X}]$, $t \in \mathbb{R}$.

6.35 U prosjeku je 2% ljudi ljevoruko. Nađite vjerojatnost da je među 100 ljudi barem troje ljevaka.

6.36 Lord Farquaad organizira svečanu večeru u svom dvorcu. Pozvano je građanstvo i plemstvo. Građani moraju za večeru izdvojiti po 1 zlatnik, a plemići po 2 zlatnika. Čuvari na ulazu u dvorac puštaju jednog po jednog čovjeka, pri čemu je 3 puta vjerojatnije da se na ulazu pojavi građanin nego plemić. Koliko najmanje ljudi treba pustiti u dvorac da s vjerojatnošću većom od 0.95 lord Farquaad sakupi barem 500 zlatnika?

6.37 U nekom gradu su dva kina, koja imaju jednak broj sjedala. Svakog dana kina posjeti 1000 ljudi. Oba kina su jedako popularna pa svaki čovjek s jednakom vjerojatnošću i nezavisno od drugih bira bilo koje. Odredite najmanji broj sjedala u svakom kinu tako da bi s vjerojatnošću barem 0.95 u njima bilo mjesta za sve ljude?

6.38 Neka kompanija ima jeftine avionske letove iz Amsterdama za London. U avionu je 150 mjesta, a svaki putnik koji rezervira kartu se zaista vozi avionom s vjerojatnošću 0.9. Kompanija u svakom slučaju želi napuniti avion pa uvijek proda 160 rezervacija. Izračunajte vjerojatnost da u avionu neće biti mjesta.

6.39 Koliko puta treba baciti 3 simetrične kocke da bi s vjerojatnošću od barem 0.9 barem 50 puta dobili barem 2 šestice u jednom bacanju?

6.40 Promatramo sljedeći slučajni pokus: Marko baca kocku čije su stranice označene brojevima 2, 4, 6, 8, 10, 12, a Ana baca kocku čije su stranice označene brojevima 1, 3, 5, 7, 9, 11. Koliko puta treba ponoviti gore opisani slučajni pokus da bi s vjerojatnošću od barem 0.8 bili sigurni da će Marko u barem 120 pokusa dobiti na kocki veći broj od Ane?

6.41 Nadaleko poznata vještica Bellatrix bavi se vrlo unosnim poslom: čarolijom pretvara vjeverice u neke druge životinje koje se dobro prodaju na tržištu. Pošto još uvijek nije usavršila čaroliju, Bellatrix pretvara vjevericu u pegaza, jednoroga ili konja redom s vjerojatnostima 0.2, 0.3 ili 0.5. Trenutna cijena pegaza na tržistu je 5 zlatnika, dok jednorog i konj vrijede po 2 zlatnika. Koliko vjeverica Bellatrix treba naručiti da bi s vjerojatnošću od barem 0.95 zaradila barem 1000 zlatnika?

6.42 Turist dolazi u Las Vegas i odlučuje igrati kockarsku igru, takvu da u svakoj partiji ulaže 1 dolar, te ako dobije, osvaja 2 dolara plus što mu se vraća ulog od 1 dolara, a ako izgubi partiju gubi 1 uloženi dolar. Poznato je da je vjerojatnost dobitka u ovoj igri $\frac{1}{4}$. Naš je turist, vođen kockarskom groznicom, odigrao 240 partija. Kolika je vjerojatnost da turist nije na gubitku?

6.43 1920. godine su u Chicagu bila dva vlaka koja su se borila za 1000 putnika koji su u isti sat kretali iz Chicaga u Los Angeles. Pretpostavimo da putnici s jednakom vjerojatnošću odabiru svaki od vlakova. Koliko minimalno sjedala mora imati svaki vlak da bi s vjerojatnošću 0.99 bili sigurni da će svaki putnik imati svoje sjedalo?

6.44 Neki trgovac je glavni distributer porculanskih vaza za neki grad. On svaku od vaza naruči iz tvornice po cijeni od 80 kn, a prodaje ih trgovinama specijaliziranim za porculansko posuđe po cijeni od 90 kn. Međutim, pri prijevozu od tvornice do njegovog skladišta se razbije 5% vaza. Sve vaze koje stignu do njegovog skladišta uvijek uspješno proda trgovinama. Koliko vaza trgovac treba naručiti iz tvornice da s vjerojatnošću od barem 0.975 zaradi barem 10 000 kn?

6.45 Morsko dno u Zaljevu Bisera je bogato školjkama. Poznato je da se u prosjeku u svakoj četvrtoj školjci nalazi biser. Ronioc pri svakom zaronu izroni samo jednu školjku. Ako je ronioc izronio 150 školjaka, izračunajte vjerojatnost da je među školjkama barem dvostruko više školjaka sa biserom nego onih bez bisera.

6.46 U nekom gradu su se jednog kišnog dana na glavnom trgu prodavale dvije vrste kišobrana; jedna vrsta po 30 kn, a druga po 50 kn. Prodavač je na kraju dana zaključio da je svaki peti kupac kišobrana kupio skuplji kišobran. Ako je tog dana bilo 200 kupaca, izračunajte vjerojatnost da je prodavač zaradio barem 7 000 kn.

6.47 Rulet ima 18 crvenih polja, 18 crnih polja i jednu nulu. Pretpostavite da u svakoj igri igrate na crveno. Ako kuglica padne na crveno, onda dobijete 1 kn, a inače gubite 1 kn. Približno odredite vjerojatnost da ste nakon 50 igara na dobitku.

Rješenja: **6.24** (a) $n+1$ (b) $1-x^{n+1}$ **6.27** (a) 0.35 (b) 0.06 **6.26** (a) 92 (b) 57 **6.28** (a) ne **6.29** 22.66 **6.30** $(0.9938)^{10}$ **6.33** Za $\alpha \leq 2$ X nema očekivanje, a za $\alpha > 2$ je $\mathbb{E}X = (\alpha-1)/(\alpha-2)$ **6.34** $e^{t^2/2}$ **6.35** 0.323 **6.36** 424 **6.37** 531 **6.38** 0.0571 **6.39** 804 **6.40** 217 **6.41** 400 **6.42** ? **6.43** ? **6.44** 2142 **6.45** 0 **6.46** 0.0392 **5.11** 0.4247