Vjerojatnost
(odabrani zadatci s rješenjima)

Zadatke odabrao i riješio:
Kristijan Kilassa Kvaternik

22. svibnja 2014.

Sadržaj

1 Vjerojatnost 2

2 Uvjetna vjerojatnost. Nezavisnost 9

3 Prebrojavanje 16

4 Slučajne varijable 23

5 Slučajni vektori 31

6 Neprekidne slučajne varijable 37

Poglavlje 1

Vjerojatnost

Zadatak (1.28.) Neka su $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ σ-algebre na Ω.

(a) Je li $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ σ-algebra?

(b) Je li $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ σ-algebra?

Rješenje.

(a) $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ je σ-algebra. Naime,

(i) Budući da je $\emptyset \in \mathcal{F}$ i $\emptyset \in \mathcal{G}$, slijedi $\emptyset \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.

(ii) Neka je $A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Tada je $A \in \mathcal{F}$ i $A \in \mathcal{G}$, a budući da su $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ σ-algebre, slijedi $A^c \in \mathcal{F}$ i $A^c \in \mathcal{G}$. Dakle, $A^c \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.

(iii) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Tada je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ i $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{G}$ pa (jer su $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ σ-algebre) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$ i $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$. Dakle, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.

(b) $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ općenito ne mora biti σ-algebra. Naime, za $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ su

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3, 4\}, \Omega\} \text{ i } \mathcal{G} = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 3, 4\}, \Omega\}$$

σ-algebre na Ω i vrijedi $\{1\} \in \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ i $\{2\} \in \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$, ali $\{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\} \notin \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$.

Zadatak (1.34.) Neka je Ω neprebrojiv skup. Je li

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq \Omega \colon A \text{ prebrojiv ili } A^c \text{ prebrojiv}\}$$

σ-algebra?

Rješenje.
Budući da je $\emptyset$ prebrojiv skup, vrijedi $\emptyset \in \mathcal{F}$.
Nadalje, neka je $A \in \mathcal{F}$. Zbog simetrije u definiciji $\mathcal{F}$ vrijedi i $A^c \in \mathcal{F}$ (naime, tvrdnja da je A prebrojiv ili A^c prebrojiv je ekvivalentna tvrdnji da je A^c prebrojiv ili $(A^c)^c$ prebrojiv).
Neka je sada $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$. Razlikujemo dva slučaja:

1° A_n je prebrojiv skup za svaki $n \in \mathbb{N}$. Budući da je prebrojiva unija prebrojivih skupova opet prebrojiv skup, slijedi da je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ prebrojiv skup pa se nalazi u $\mathcal{F}$.

2° Postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je A_{n_0} neprebrojiv i $A_{n_0}^c$ prebrojiv. Budući da je $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c \subseteq A_{n_0}^c$, a podskup prebrojivog skupa je i sam prebrojiv, slijedi da je $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c\right)^c$ prebrojiv skup pa $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$

Dakle, $\mathcal{F}$ je σ-algebra.

Napomena. U prethodnom zadatku pod pojmom *prebrojiv skup* podrazumijevamo skup koji je konačan ili prebrojivo beskonačan (postoji bijekcija s tog skupa u $\mathbb{N}$).

Zadatak (1.37.) Neka je $\Omega = \{a, b, c\}$. Ako je $\mathbb{P}(\{a, b\}) = 0.7$, $\mathbb{P}(\{b, c\}) = 0.6$, odredite vjerojatnosti događaja $\{a\}$, $\{b\}$ i $\{c\}$.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{a\}) &= \mathbb{P}(\Omega) - \mathbb{P}(\{b, c\}) = 1 - 0.6 = 0.4, \\
\mathbb{P}(\{c\}) &= \mathbb{P}(\Omega) - \mathbb{P}(\{a, b\}) = 1 - 0.7 = 0.3, \\
\mathbb{P}(\{b\}) &= \mathbb{P}(\Omega) - \mathbb{P}(\{a\}) - \mathbb{P}(\{c\}) = 1 - 0.4 - 0.3 = 0.3.
\end{aligned}$$

Zadatak (1.38.) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $A, B \in \mathcal{F}$ takvi da je $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.8$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.2$, $\mathbb{P}(A^c) = 0.6$. Izračunajte $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \setminus B)$.

Rješenje.

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 0.4,$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \Rightarrow \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A \cap B) = 0.6.$$

Nadalje, uočimo da zbog

$$A = (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \;\&\; (A \cap B^c) \cap (A \cap B) = \emptyset$$

vrijedi

$$\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0.2.$$

Zadatak (1.43.) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Postoje li $A, B, C \in \mathcal{F}$ takvi da vrijedi

$$\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(C) > \frac{3}{4},$$

$$\mathbb{P}(A \triangle B) + \mathbb{P}(B \triangle C) < \frac{2}{3}?$$

Rješenje.
Neka su $A, B, C \in \mathcal{F}$. Tada vrijedi

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup B) + \underbrace{\mathbb{P}(A \cap B)}_{\geqslant 0}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \geqslant \mathbb{P}(A \cup B) \tag{1.1}$$

Nadalje, za simetričnu razliku vrijedi

$$A \triangle C \subseteq (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A \triangle C) \leqslant \mathbb{P}((A \triangle B) \cup (B \triangle C)) \tag{1.2}$$

te također

$$A \triangle \emptyset = A. \tag{1.3}$$

Sada iz (1.1), (1.2) i (1.3) slijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \triangle C) + \mathbb{P}(C) &\geqslant \mathbb{P}((A \triangle C) \cup C) \\ &= \mathbb{P}((A \triangle C) \cup (C \triangle \emptyset)) \\ &\geqslant \mathbb{P}(A \triangle \emptyset) \\ &= \mathbb{P}(A) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A \triangle C) \geqslant \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A) > \frac{3}{4}.$$

Nadalje, primjenjujući (1.1) i (1.2) na drugu nejednakost zadatka imamo

$$\frac{2}{3} > \mathbb{P}(A \triangle B) + \mathbb{P}(B \triangle C) \geqslant \mathbb{P}((A \triangle B) \cup (B \triangle C)) \geqslant \mathbb{P}(A \triangle C)$$

$$\mathbb{P}(A \triangle C) < \frac{2}{3}.$$

Dakle, imamo $\mathbb{P}(A \triangle C) < \frac{2}{3}$ i $\mathbb{P}(A \triangle C) > \frac{3}{4}$ pa zaključujemo kako takvi A, B, C ne postoje.

Zadatak (1.44.) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $A, B \in \mathcal{F}$. Pokažite nejednakost

$$\mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \sqrt{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}.$$

Rješenje.
Iz monotonosti vjerojatnosti slijedi

$$A \cap B \subseteq A \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(A),$$

$$A \cap B \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(B).$$

Množenjem dobivenih nejednakosti i korjenovanjem direktno slijedi zadana nejednakost.

Zadatak (1.45.) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $A, B, C \in \mathcal{F}$. Vrijedi li $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A^c \cap B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B^c \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C^c) - 2\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$?

Rješenje.
Budući da se događaji $A^c \cap B \cap C$, $A \cap B^c \cap C$, $A^c \cap B \cap C^c$ u parovima uzajamno isključuju (u parovima su disjunktni), zbog konačne aditivnosti vjerojatnosti imamo

$$\mathbb{P}(A^c \cap B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B^c \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C^c) + 2\mathbb{P}(A \cap B \cap C) =$$

$(\mathbb{P}(A^c \cap B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)) + (\mathbb{P}(A^c \cap B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)) + (\mathbb{P}(A^c \cap B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C) =$

$\mathbb{P}((A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)) + \mathbb{P}((A \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B \cap C)) + \mathbb{P}((A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B \cap C)) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C) =$

$\mathbb{P}(\underbrace{(A^c \cup A)}_{=\Omega} \cap B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap \underbrace{(B^c \cup B)}_{=\Omega} \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap \underbrace{(C^c \cup C)}_{=\Omega}) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C) =$

$$= \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

Sada je zadana jednakost ekvivalentna sljedećoj:

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C),$$

što je upravo Sylvesterova formula za tri događaja A, B, C. Zato zadana jednakost vrijedi.

Zadatak (1.46.) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$. Dokažite da je

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \geqslant \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \ldots + \mathbb{P}(A_n) - (n-1).$$

Rješenje.
Nejednakost dokazujemo matematičkom indukcijom po n.

(i) Baza. Za $n = 1$ nejednakost postaje $\mathbb{P}(A_1) \geqslant \mathbb{P}(A_1)$, što očito vrijedi. Za $n = 2$ nejednakost postaje

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \geqslant \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - 1,$$

što vrijedi jer

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) \underbrace{-\mathbb{P}(A_1 \cup A_2)}_{\geqslant -1} \geqslant \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - 1.$$

(ii) Pretpostavka. Pretpostavimo da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - (n-1)$$

za proizvoljne $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$.

(iii) Korak. Imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= \mathbb{P}\left(A_{n+1} \cap \bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \\
&\geqslant \mathbb{P}(A_{n+1}) + \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) - 1 \\
&\geqslant \mathbb{P}(A_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - (n-1) - 1 \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_i) - n
\end{aligned}$$

Zadatak (1.53.) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ takvi da je $\mathbb{P}(A_n) = 1,\ n \in \mathbb{N}$. Izračunajte

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Rješenje.
Neka je $k \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Prema nejednakosti iz prethodnog zadatka imamo

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{k} A_n\right) \geqslant \sum_{n=1}^{k} \underbrace{\mathbb{P}(A_n)}_{=1} - (k-1) = k - (k-1) = 1$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{k} A_n\right) = 1,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Sada definiramo niz događaja $(B_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ sa $B_k = \bigcap_{n=1}^{k} A_n,\ k \in \mathbb{N}$. Uočimo da je $\mathbb{P}(B_k) = 1,\ k \in \mathbb{N}$. Budući da je to padajući niz događaja $(B_k \supseteq B_{k+1},\ k \in \mathbb{N})$, zbog neprekidnosti vjerojatnosti u odnosu na padajuće nizove događaja imamo

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\mathbb{P}(B_k)}_{=1} = 1.$$

S druge strane,

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{k} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n,$$

pa slijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1.$$

Zadatak (1.55.) Dokažite **Bonferronijevu nejednakost**: za $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j).$$

Rješenje.
Nejednakost dokazujemo matematičkom indukcijom po n.

(i) Baza. Za $n = 1$ imamo nejednakost $\mathbb{P}(A_1) \geqslant \mathbb{P}(A_1)$ koja očito vrijedi, a za $n = 2$ nejednakost $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) \geqslant \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$ koja također vrijedi (jer vrijedi jednakost).

(ii) Pretpostavka. Pretpostavimo da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j),$$

za proizvoljne $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$.

(iii) Korak. Imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) &= \mathbb{P}\left(A_{n+1} \cup \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \\
&\geqslant \mathbb{P}(A_{n+1}) + \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) - \mathbb{P}\left(A_n \cap \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \\
&= \mathbb{P}(A_{n+1}) + \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} (A_k \cap A_{n+1})\right) \\
&\geqslant \mathbb{P}(A_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k \cap A_{n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_k) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1} \mathbb{P}(A_i \cap A_j)
\end{aligned}$$

gdje smo koristili pretpostavku indukcije i nejednakost $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$.

Zadatak (1.56.) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ takvi da je

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n \triangle A) = 0.$$

Izračunajte

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Rješenje.
Za svaki $n \in \mathbb{N}$ (zbog $(A_n \setminus A) \cap (A \setminus A_n) = \emptyset$) vrijedi

$$\mathbb{P}(A_n \triangle A) = \mathbb{P}((A_n \setminus A) \cup (A \setminus A_n)) = \mathbb{P}(A_n \setminus A) + \mathbb{P}(A \setminus A_n)$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant \mathbb{P}(A_n \setminus A) \leqslant \mathbb{P}(A_n \triangle A),\ 0 \leqslant \mathbb{P}(A \setminus A_n) \leqslant \mathbb{P}(A_n \triangle A),$$

pa je po teoremu o sendviču

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n \setminus A) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A \setminus A_n) = 0.$$

Nadalje,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n \setminus A) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n \cap A^c) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n \cup A^c) = 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A \cap A_n^c) = 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A \setminus A_n) = 1$$

Sada za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$\mathbb{P}(A_n \cup A^c) = \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A^c) - \mathbb{P}(A_n \cap A^c)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A_n \cup A^c) + \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A_n \cap A^c) - 1$$

pa je

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1 + \mathbb{P}(A) + 0 - 1 = \mathbb{P}(A)$$

Zadatak (1.57.) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i neka je

$$\mathcal{N} = \{E \subseteq \Omega \colon \exists F \in \mathcal{F} \text{ takav da je } E \subseteq \mathcal{F} \text{ i } \mathbb{P}(F) = 0\}.$$

(a) Pokažite da je familija $\mathcal{N}$ zatvorena na prebrojive unije.

(b) Pokažite da je familija

$$\mathcal{G} = \{A \subseteq \Omega \colon \exists B \in \mathcal{F} \text{ takav da je } A \triangle B \in \mathcal{N}\}$$

σ-algebra.

Rješenje.

(a) Neka je dan proizvoljan niz $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{N}$. Prema definiciji skupa $\mathcal{N}$ postoji niz $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ takav da $E_n \subseteq F_n$ i $\mathbb{P}(F_n) = 0$ za svaki prirodan broj n. Uočimo da vrijedi $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$, a kako je $\mathcal{F}$ σ-algebra, vrijedi $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n \in \mathcal{F}$. S druge strane, zbog subaditivnosti vjerojatnosti slijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(F_n) = 0.$$

Dakle, $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{N}$.

(b) (i) Vrijedi $\emptyset \in \mathcal{G}$ jer $\emptyset \in \mathcal{F}$ i $\emptyset \triangle \emptyset = \emptyset \in \mathcal{N}$.

(ii) Neka je $A \in \mathcal{G}$. Tada postoji $B \in \mathcal{F}$ takav da $A \triangle B \in \mathcal{N}$. No budući da je $\mathcal{F}$ σ-algebra, to je $B^c \in \mathcal{F}$ i vrijedi $A^c \triangle B^c = A \triangle B \in \mathcal{N}$. Dakle, $A^c \in \mathcal{G}$.

(iii) Neka je dan proizvoljan niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{G}$. Tada postoji niz $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ takav da $A_n \triangle B_n \in \mathcal{N}$, $n \in \mathbb{N}$. Budući da je $\mathcal{F}$ σ-algebra, to je $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{F}$.

Također, prema (a) dijelu imamo $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (A_n \triangle B_n) \in \mathcal{N}$. Sada je

$$\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \triangle \left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j\right) = \left[\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j\right)\right] \setminus \left[\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j\right)\right] =$$

$$\left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\bigcup_{j\in\mathbb{N}} (A_i \cup B_j)\right] \setminus \left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\bigcup_{j\in\mathbb{N}} (A_i \cap B_j)\right] = \left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cup B_n)\right] \setminus \left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\bigcup_{j\in\mathbb{N}} (A_i \cap B_j)\right] =$$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{(A_n \cup B_n) \setminus \left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\bigcup_{j\in\mathbb{N}} (A_i \cap B_j)\right]\right\} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [(A_n \cup B_n) \setminus (A_n \cap B_n)] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \triangle B_n)$$

Dakle, $\left(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \triangle \left(\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} B_j\right) \in \mathcal{N}$ jer je podskup skupa iz $\mathcal{N}$ sam element skupa $\mathcal{N}$. Zato (prema definiciji skupa $\mathcal{N}$) vrijedi $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{G}$.

Poglavlje 2

Uvjetna vjerojatnost i nezavisnost

Zadatak (2.16.) Neka je (A_n) niz nezavisnih događaja takav da je

$$\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Izračunajte

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Rješenje.
Najprije ćemo matematičkom indukcijom pokazati da su za svaki prirodan broj $n \geqslant 2$ događaji $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ i A_k $(k > n)$ nezavisni.

(i) ***Baza.*** Za $n = 2$ i $k > 2$ imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((A_1 \cup A_2) \cap A_k) &= \mathbb{P}((A_1 \cap A_k) \cup (A_2 \cap A_k)) \\
&= \mathbb{P}(A_1 \cap A_k) + \mathbb{P}(A_2 \cap A_k) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_k) \\
&= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_k) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_k) - \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_k) \\
&= (\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2))\,\mathbb{P}(A_k) \\
&= \mathbb{P}(A_1 \cup A_2)\mathbb{P}(A_k)
\end{aligned}$$

pri čemu smo koristili pretpostavku da su događaji A_1, A_2, A_k $(k > n)$ nezavisni.

(ii) ***Pretpostavka.*** Pretpostavimo da su događaji $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ i A_k nezavisni za neki $n \in \mathbb{N}$ i svaki $k > n$.

(iii) ***Korak.*** Označimo $B = A_1 \cup \ldots A_n$. Za $k > n + 1$ imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((B \cup A_{n+1}) \cap A_k) &= \mathbb{P}((B \cap A_k) \cup (A_{n+1} \cap A_k)) \\
&= \mathbb{P}(B \cap A_k) + \mathbb{P}(A_{n+1} \cap A_k) - \mathbb{P}(B \cap A_{n+1} \cap A_k) \\
&= [\text{koristimo pretpostavku indukcije}] \\
&= \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A_k) + \mathbb{P}(A_{n+1})\mathbb{P}(A_k) - \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A_{n+1})\mathbb{P}(A_k) \\
&= (\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A_{n+1}))\,\mathbb{P}(A_k) \\
&= \mathbb{P}(B \cup A_{n+1})\mathbb{P}(A_k)
\end{aligned}$$

Uočimo da iz upravo dokazanog posebno slijedi da su za svaki $n \in \mathbb{N}$ događaji $B_n := A_1 \cup \ldots \cup A_n$ i A_{n+1} nezavisni. Sada koristeći ovu činjenicu matematičkom indukcijom možemo pokazati da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\mathbb{P}(B_n) = \frac{n}{n+1}.$$

(i) Baza. Vrijedi

$$\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{2},$$
$$\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

pa tvrdnja vrijedi.

(ii) Pretpostavka. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Korak. Imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_{n+1}) &= \mathbb{P}(B_n \cup A_{n+1}) \\
&= \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}(B_n \cap A_{n+1}) \\
&= [\text{koristimo pretpostavku indukcije i prethodno dokazanu tvrdnju}] \\
&= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n+2} \\
&= \frac{n(n+2) + n + 1 - n}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n+1}{n+2}
\end{aligned}$$

Sada zbog neprekidnosti vjerojatnosti u odnosu na rastuće nizove događaja slijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Zadatak (2.17.) Neka su $A_1, \ldots, A_n$ nezavisni događaji. Dokažite

$$1 - e^{-(\mathbb{P}(A_1)+\ldots+\mathbb{P}(A_n))} \leqslant \mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \leqslant \mathbb{P}(A_1) + \ldots + \mathbb{P}(A_n).$$

Rješenje.
Najprije ćemo dokazati nejednakost

$$1 - e^{-(\mathbb{P}(A_1)+\ldots+\mathbb{P}(A_n))} \leqslant \mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$$

koja je ekvivalentna s

$$\begin{aligned}
& 1 - \mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \leqslant e^{-(\mathbb{P}(A_1)+\ldots+\mathbb{P}(A_n))} \\
\Leftrightarrow\ & \mathbb{P}(A_1^c \cap \ldots \cap A_n^c) \leqslant e^{-(\mathbb{P}(A_1)+\ldots+\mathbb{P}(A_n))} \\
\Leftrightarrow\ & (1 - \mathbb{P}(A_1)) \cdot \ldots \cdot (1 - \mathbb{P}(A_n)) \leqslant e^{-\mathbb{P}(A_1)} \cdot \ldots \cdot e^{-\mathbb{P}(A_n)}
\end{aligned}$$

Pritom zbog pretpostavke nezavisnosti događaja $A_1, \dots, A_n$ slijedi i nezavisnost događaja $A_1^c, \dots, A_n^c$. Promatrajmo sada funkciju

$$f\colon [0, \infty\rangle \to \mathbb{R}, f(x) = x + e^{-x} - 1.$$

Vrijedi $f'(x) = 1 - e^{-x} \geqslant 0$ za svaki $x \in [0, \infty\rangle$ pa zaključujemo da je f rastuća na svojoj domeni. Budući da je $f(0) = 0$, zaključujemo

$$1 - x \leqslant e^{-x}, \quad x \in [0, \infty\rangle.$$

Zato posebno za $i \in \{1, \dots, n\}$ vrijedi

$$1 - \mathbb{P}(A_i) \leqslant e^{-\mathbb{P}(A_i)},$$

pa množenjem ovih nejednakosti dobivamo nejednakost

$$(1 - \mathbb{P}(A_1)) \cdot \ldots \cdot (1 - \mathbb{P}(A_n)) \leqslant e^{-\mathbb{P}(A_1)} \cdot \ldots \cdot e^{-\mathbb{P}(A_n)},$$

pa time zaključujemo da vrijedi i zadana nejednakost koja joj je ekvivalentna. Druga nejednakost vrijedi za proizvoljne familije događaja i posljedica je σ - subaditivnosti vjerojatnosti.

Zadatak (2.19.) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $A, B \in \mathcal{F}$ takvi da je $\mathbb{P}(B) > 0$. Pokažite da je

$$\mathbb{P}(A|B) \geqslant \frac{\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1}{\mathbb{P}(B)}.$$

Rješenje.
Zadana je nejednakost ekvivalentna sljedećima

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \geqslant \frac{\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1}{\mathbb{P}(B)} \\ \Leftrightarrow \quad & \mathbb{P}(A \cap B) \geqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 \\ \Leftrightarrow \quad & 1 \geqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ \Leftrightarrow \quad & 1 \geqslant \mathbb{P}(A \cup B) \end{aligned}$$

a kako vrijedi posljednja nejednakost, vrijedi i zadana.

Zadatak (2.20.) U kutiji je n kuglica označenih brojevima $1, 2, \dots, n$. Iz kutije na jedan način izvučemo jednu kuglicu. Ako je kuglica bila označena brojem 1, ne vraćamo je u kutiju, a inače je vraćamo. Nakon toga izvučemo još jednu kuglicu. Izračunajte vjerojatnost da je druga kuglica označena brojem 2.

Rješenje.
Definiramo potpun sistem događaja

$$\begin{aligned} H_1 =& \{\text{prva izvučena kuglica je označena brojem } 1\}, \\ H_2 =& \{\text{prva izvučena kuglica nije označena brojem } 2\}, \end{aligned}$$

te događaj $A =\{$druga izvučena kuglica je označena brojem 2$\}$. Vrijedi

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{1}{n}, \qquad \mathbb{P}(A|H_1) = \frac{1}{n-1},$$
$$\mathbb{P}(H_2) = \frac{n-1}{n}, \qquad \mathbb{P}(A|H_2) = \frac{1}{n}.$$

Naime, ukoliko smo izvukli kuglicu s brojem 1, iduću kuglicu biramo od preostalih $n-1$, a u suprotnom od svih n. Sada prema formuli potpune vjerojatnosti slijedi

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2)\mathbb{P}(H_2) = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{n^2-n+1}{n^3-n^2}.$$

Zadatak (2.22.) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $A, B \in \mathcal{F}$ takvi da je $0 < \mathbb{P}(B) < 1$. Pokažite da je

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B^c) \iff A \text{ i } B \text{ su nezavisni.}$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B^c) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A\cap B^c)}{\mathbb{P}(B^c)} \\
&\Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(A\cap B)(1-\mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A\cap B^c)\mathbb{P}(B) \\
&\Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(A\cap B) = (\mathbb{P}(A\cap B) + \mathbb{P}(A\cap B^c))\mathbb{P}(B) \\
&\Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\
&\Leftrightarrow \quad A \text{ i } B \text{ su nezavisni}
\end{aligned}$$

Zadatak (2.26.) U ponoć su na parkiralištu bila 2 siva i 1 crni Ford, 3 siva i 4 crna BMW-a i 3 sive i 1 crna Toyota. Te noći je kradljivac automobila nasumce odabrao automobil i ukrao ga. Ako je ukraden automobil sive boje, koja je vjerojatnost da je to bio BMW?

Rješenje.
Definiramo potpun sistem događaja

$$\begin{aligned}
H_1 &=\{\text{ukraden je Ford}\}, \\
H_2 &=\{\text{ukraden je BMW}\}, \\
H_3 &=\{\text{ukradena je Toyota}\},
\end{aligned}$$

te događaj $A =\{$ukraden je automobil sive boje$\}$. Vrijedi

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{3}{14}, \qquad \mathbb{P}(A|H_1) = \frac{2}{3},$$
$$\mathbb{P}(H_2) = \frac{7}{14}, \qquad \mathbb{P}(A|H_2) = \frac{3}{7},$$
$$\mathbb{P}(H_3) = \frac{4}{14}, \qquad \mathbb{P}(A|H_3) = \frac{3}{4},$$

pa prema Bayesovoj formuli vrijedi

$$\mathbb{P}(H_2|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_2)\mathbb{P}(H_2)}{\sum_{i=1}^3 \mathbb{P}(A|H_i)\mathbb{P}(H_i)} = \frac{3}{8} = 0.375.$$

Dakle, ukoliko je ukraden automobil sive boje, vjerojatnost da je to bio BMW iznosi 37.5%.

Zadatak (2.27.) Marko je ozbiljan student koji uči petkom navečer. Međutim, njegov cimer ide van petkom navečer; 40% puta ode van s djevojkom, a 60% puta ode do obližnjeg bara. Ako ode van s djevojkom, onda kod nje prespava 30% puta, a ako otiđe u bar, onda u 40% puta izazove tuču i noć provede u zatvoru. Jedne subote Marko se probudio i vidio da mu cimer nije u sobi. Izračunajte vjerojatnost da je Markov cimer u zatvoru.

Rješenje.
Definiramo potpun sistem događaja

$$\begin{aligned} H_1 =& \{\text{Markov cimer je otišao van s djevojkom}\}, \\ H_2 =& \{\text{Markov cimer je otišao u bar}\}, \end{aligned}$$

te događaj $A = \{\text{Markov cimer nije u sobi}\}$. Vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(H_1) &= 0.4, & \mathbb{P}(A|H_1) &= 0.3, \\ \mathbb{P}(H_2) &= 0.6, & \mathbb{P}(A|H_2) &= 0.4. \end{aligned}$$

Tražimo vjerojatnost $\mathbb{P}(H_2|A)$ (ukoliko je Markov cimer otišao u bar, a ujutro nije u svojoj sobi, završio je u zatvoru). Prema Bayesovoj je formuli

$$\mathbb{P}(H_2|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_2)\mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2)\mathbb{P}(H_2)} = \frac{2}{3}.$$

Zadatak (2.28.) Tri prijateljice, Dunja, Lidija i Tina, prijavile su se kao ekipa na kviz znanja. One se za odgovor na pitanje prijavljuju s vjerojatnostima $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{6}$. Na pitanje odgovaraju točno s vjerojatnostima $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$ i $\frac{3}{5}$. Ako pitanje nije točno odgovoreno, nađite vjerojatnost da je na pitanje odgovarala Tina.

Rješenje.
Definiramo potpun sistem događaja

$$\begin{aligned} H_1 =& \{\text{na pitanje je odgovarala Dunja}\}, \\ H_2 =& \{\text{na pitanje je odgovarala Lidija}\}, \\ H_3 =& \{\text{na pitanje je odgovarala Tina}\}, \end{aligned}$$

te događaj $A = \{\text{pitanje nije točno odgovoreno}\}$. Vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(H_1) &= \frac{1}{2}, & \mathbb{P}(A|H_1) &= \frac{1}{5}, \\ \mathbb{P}(H_2) &= \frac{1}{3}, & \mathbb{P}(A|H_2) &= \frac{2}{5}, \\ \mathbb{P}(H_3) &= \frac{1}{6}, & \mathbb{P}(A|H_3) &= \frac{2}{5}, \end{aligned}$$

pa prema Bayesovoj formuli slijedi

$$\mathbb{P}(H_3|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_3)\mathbb{P}(H_3)}{\sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(A|H_i)\mathbb{P}(H_i)} = \frac{2}{9}.$$

Zadatak (2.29.) Nekim kanalom se prenose podatci pomoću znakova 0 i 1. Vjerojatnost da se pošalje 1 je 0.3, a vjerojatnost da se pošalje 0 je 0.7. Na izlazu se 15% znakova pogrešno interpretira. Ako je primljen znak 1, izračunajte vjerojatnost da je poslan znak 0.

Rješenje.
Definiramo potpun sistem događaja

$$H_1 = \{\text{poslan je znak } 0\},$$
$$H_2 = \{\text{poslan je znak } 1\},$$

te događaj $A = \{\text{primljen je znak } 1\}$. Vrijedi

$$\mathbb{P}(H_1) = 0.7, \qquad \mathbb{P}(A|H_1) = 0.15,$$
$$\mathbb{P}(H_2) = 0.3, \qquad \mathbb{P}(A|H_2) = 0.85.$$

Naime, ukoliko je poslan znak 0, da bi se primio znak 1 potrebno je poslani znak pogrešno interpretirati (za što je vjerojatnost 15%), dok je u suprotnom potrebno znak ispravno interpretirati. Sada prema Bayesovoj formuli slijedi

$$\mathbb{P}(H_1|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2)\mathbb{P}(H_2)} = \frac{7}{24}.$$

Zadatak (2.30.) Na stolu su dvije kutije. U prvoj kutiji su plava, zelena i crvena kuglica, a u drugoj kutiji je p plavih, z zelenih i c crvenih kuglica ($p, z, c \geqslant 1$). Slučajno odaberemo dvije kuglice iz prve kutije i prebacimo ih u drugu kutiju. Nakon toga iz durge kutije izvučemo kuglicu. Ako je izvučena kuglica zelene boje, izračunajte vjerojatnost da u prvoj kutiji nema crvene kuglice.

Rješenje.
Definiramo potpun sistem događaja

$$H_1 = \{\text{u prvoj je kutiji ostala plava kuglica}\},$$
$$H_2 = \{\text{u prvoj je kutiji ostala zelena kuglica}\},$$
$$H_3 = \{\text{u prvoj je kutiji ostala crvena kuglica}\},$$

te događaj $A = \{\text{izvučena je zelena kuglica}\}$. Vrijedi

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{1}{3}, \qquad \mathbb{P}(A|H_1) = \frac{z+1}{p+c+z+2},$$
$$\mathbb{P}(H_2) = \frac{1}{3}, \qquad \mathbb{P}(A|H_2) = \frac{z}{p+c+z+2},$$
$$\mathbb{P}(H_3) = \frac{1}{3}, \qquad \mathbb{P}(A|H_3) = \frac{z+1}{p+c+z+2}.$$

Naime, ukupan se broj kuglica u drugoj kutiji nakon prebacivanja poveća za 2, a broj zelenih kuglica se poveća za 1 ukoliko smo prebacili zelenu kuglicu (tj. ostvarili su se događaji H_1 ili H_3). Tražimo vjerojatnost $\mathbb{P}(H_3^c|A) = 1 - \mathbb{P}(H_3|A)$. Prema Bayesovoj je formuli

$$\mathbb{P}(H_3^c|A) = 1 - \frac{\mathbb{P}(A|H_3)\mathbb{P}(H_3)}{\sum_{i=1}^{3}\mathbb{P}(A|H_i)\mathbb{P}(H_i)} = 1 - \frac{z+1}{3z+2} = \frac{2z+1}{3z+2}.$$

Zadatak (2.32.) Pijanac šeće ulicom dugom m blokova. Na početku ulice je bar, a na kraju njegov stan. U svakom trenutku pijanac s jednakom vjerojatnošću ide lijevo ili desno. Ako se pijanac nalazi k blokova ($0 \leqslant k \leqslant m$), kolika je vjerojatnost da dođe u stan prije nego završi u baru?

Rješenje.

Pretpostavimo da se stan nalazi lijevo, a bar desno od pijanca. Definiramo potpun sistem događaja

$$\begin{aligned} H_1 =& \{\text{pijanac je prvi put krenuo lijevo}\}, \\ H_2 =& \{\text{pijanac je prvi put krenuo desno}\}, \end{aligned}$$

te događaj $A = \{\text{pijanac je došao u stan prije nego je završio u baru}\}$. Neka je p_k vjerojatnost da pijanac dođe u stan prije nego završi u baru ako je od bara udaljen k blokova ($0 \leqslant k \leqslant m$). Vrijedi $p_0 = 0, p_m = 1$ (u tim se slučajevima pijanac već nalazi u baru, odn. stanu). Nadalje, pretpostavimo sada $0 < k < m$. Imamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(H_1) &= \frac{1}{2}, & \mathbb{P}(A|H_1) &= p_{k+1}, \\ \mathbb{P}(H_2) &= \frac{1}{2}, & \mathbb{P}(A|H_2) &= p_{k-1}. \end{aligned}$$

Naime, ukoliko pijanac prvi put krene lijevo, od bara bude udaljen $k+1$ blok, a ukoliko krene desno, od bara bude udaljen $k-1$ blok (dakle, tražimo vjerojatnost istog događaja, samo uz drugu udaljenost od bara). Sada je prema formuli potpune vjerojatnosti

$$p_k = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2)\mathbb{P}(H_2) = \frac{1}{2}(p_{k+1} + p_{k-1}).$$

Dakle, za $0 < k < m$ vrijedi relacija

$$2p_k = p_{k-1} + p_{k+1}. \tag{2.1}$$

Ako u relaciju (2.1) uvrstimo redom $k = 1, 2, \ldots$, dobivamo

$$\begin{aligned} 2p_1 = p_0 + p_2 \;&\Rightarrow\; p_2 = 2p_1, \\ 2p_2 = p_1 + p_3 \;&\Rightarrow\; p_3 = 3p_1, \\ 2p_3 = p_2 + p_4 \;&\Rightarrow\; p_4 = 4p_1, \end{aligned}$$

i tako dalje. Induktivno, $p_k = kp_1$. Zato imamo

$$1 = p_m = mp_1 \quad \Rightarrow \quad p_1 = \frac{1}{m},$$

a odavde $\mathbb{P}(A) = p_k = \dfrac{k}{m}$. Dakle, vjerojatnost da pijanac dođe u stan prije nego završi u baru jednaka je $\dfrac{k}{m}$.

Poglavlje 3

Prebrojavanje

Zadatak (3.14.) Na slučajan način od 52 karte biramo 13 karata. Izračunajte vjerojatnost da u dobivenim kartama neće biti zastupljene sve četiri vrste.

Rješenje.
Prostor elementarnih događaja Ω čine svi 13-člani podskupovi skupa od 52 elementa pa je $|\Omega| = \binom{52}{13}$. Nadalje, definiramo događaj

$$A = \{\text{među izvučenim kartama nisu zasutpljene sve 4 vrste (boje)}\}.$$

Boju koja nije zastupljena možemo birati na 4 načina, a zatim od preostalih 39 karata (koje nisu te boje) biramo njih 13 na $\binom{39}{13}$ načina. Dakle, $|A| = 4\binom{39}{13}$ pa je

$$\mathbb{P}(A) = \frac{4\binom{39}{13}}{\binom{52}{13}} = 0.05116.$$

Zadatak (3.18.) Na peronu je vlak koji ima n vagona. Ako od m $(m > n)$ putnika svaki nasumce bira jedan vagon, izračunajte vjerojatnost da je u svakom vagonu barem jedan putnik.

Rješenje.
Za $i = 1, \ldots, n$ definiramo događaje

$$A_i = \{\text{u } i\text{-tom vagonu nema putnika}\}.$$

m putnika u n vagona možemo smjestiti na ukupno n^m načina (za svakog putnika imamo n mogućnosti). Pretpostavimo da u vagonima $i_1, \ldots, i_k$ nema putnika. Tada putnike u preostalih $n-k$ vagona možemo smjestiti na $(n-k)^m$ načina. Dakle,

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)^m}{n^m}.$$

Općenito, za svaki k-člani podskup $I_k \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in I_k} A_j\right) = \frac{(n-k)^m}{n^m}.$$

Mi tražimo vjerojatnost

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right).$$

Prema Sylvesterovoj formuli imamo

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{I_k \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |I_k|=k}} (-1)^{k+1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in I_k} A_j\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)^m}{n^m}
\end{aligned}
$$

Zato slijedi

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right) &= 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)^m}{n^m} \\
&= (-1)^0 \binom{n}{0} \frac{(n-0)^m}{n^m} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(n-k)^m}{n^m} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(n-k)^m}{n^m} \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m}{n^m}
\end{aligned}
$$

Zadatak (3.19.) Iz skupa $\{1, 2, \ldots, 20\}$ nasumce biramo 5 brojeva, jedan po jedan. Kolika je vjerojatnost da izaberemo

(a) 5 uzastopnih brojeva?

(b) 5 uzastopnih brojeva u rastućem poretku?

Rješenje.
Od 20 brojeva njih 5 možemo odabrati na ukupno $\binom{20}{5}$ načina.

(a) Među brojevima od 1 do 20 ukupno postoji 16 petorki uzastopnih brojeva (to su petorke $\{1, \ldots, 5\}, \{2, \ldots, 6\}, \ldots \{16, \ldots, 20\}$) pa je tražena vjerojatnost

$$\frac{16}{\binom{20}{5}} = 0.001032.$$

(b) Proizvoljnu uređenu petorku u skupu od 20 elemenata mo žemo odabrati na $\binom{20}{5} \cdot 5!$ načina (jer nam je bitan i poredak elemenata unutar petorke). S druge strane, rastućih petorki uzastopnih brojeva ponovno ima 16 pa je tražena vjerojatnost

$$\frac{16}{\binom{20}{5} \cdot 5!} = 0.0000085999.$$

Zadatak (3.22.) Luster ima 5 grla za žarulje, od kojih su 2 ispravna i 3 neispravna. U grla nasumce stavimo 5 žarulja medu kojima su 2 ispravne i 3 neispravne. Kolika je vjerojatnost da ćemo uključivanjem lustera u struju dobiti svjetlo?

Rješenje.
Definiramo događaje

$$A_1 = \{\text{prva ispravna žarulja je u ispravnom grlu}\},$$

$$A_2 = \{\text{druga ispravna žarulja je u ispravnom grlu}\}.$$

Tražimo vjerojatnost $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2)$. Žarulje u grla možemo općenito smjestiti na ukupno 5! načina. Nađimo sada broj razmještaja kod kojih je jedna ispravna žarulja u ispravnom grlu. Žarulju možemo izabrati na 2 načina, grlo na 2, dok preostale žarulje možemo smjestiti na 4! načina. Dakle,

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \frac{4 \cdot 4!}{5!}.$$

Obje ispravne žarulje možemo smjestiti u ispravna grla na 2 načina, dok preostale žarulje možemo smjestiti na 3! načina. Zato je

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{2 \cdot 3!}{5!}.$$

Konačno,

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{4 \cdot 4! - 2 \cdot 3!}{5!} = 0.7.$$

Zadatak (3.29.) Dva igrača, A i B, igraju niz igara. U svakoj pojedinoj igri bez obzira na ishode prethodnih igara svaki igrač pobjeđuje s vjerojatnošću $\frac{1}{2}$. Pobjednik igre dobiva 1 bod, a poraženi 0 bodova. Dogovor je da igra traje dok A ne skupi 2 boda ili dok B ne skupi 3 boda. Prije početka igre A ulaže a kuna, a B b kuna, gdje je $a + b = 64$ kune. Ukupni pobjednik dobiva sav novac. Koliko mora svaki od njih uplatiti kako bi igra bila *fair*?

Rješenje.
Igra će biti *fair* ukoliko je omjer uloženih iznosa igrača A i B jednak omjeru njihovih vjerojatnosti za pobjedu. Uočimo da se prostor elementarnih događaja sastoji od nizova oblika AB, ABA, ..., pri čemu nam A označava da je u toj igri pobijedio igrač A (analogno za B). Definiramo događaje

$$Q_1 = \{\text{pobijedio je igrač A}\},$$

$$Q_1 = \{\text{pobijedio je igrač A}\}.$$

Iz uvjeta zadatka vidimo da vrijedi $Q_1 = \{\text{AA, ABA, BAA, ABBA, BABA, BBAA}\}$ (A je pobijedio ako je skupio 2 boda, no za to je vrijeme B smio skupiti najviše 2 boda jer u suprotnom B pobjeđuje), $Q_2 = \{\text{BBB, ABBB, BABB, BBAB}\}$ (B je pobijedio ako je skupio 3 boda, no za to je vrijeme A smio skupiti najviše 1 bod). Dakle,

$$\mathbb{P}(Q_1) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{11}{16},$$

$$\mathbb{P}(Q_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16},$$

pa je omjer vjerojatnosti pobjede od A i B $11 : 5$. Slijedi da u tom omjeru igrači A i B trebaju uložiti novac, odn. A treba uložiti $\frac{11}{16} \cdot 64 = 44$, a B $\frac{5}{16} \cdot 64 = 20$ kuna.

Zadatak (3.30.) U nekom se kraljevstvu organizira viteški turnir. Dan prije na turnir je došlo n vitezova. Netko je preko noći na slučajan način vitezovima izmiješao koplja.

(a) Kolika je vjerojatnost da je barem jedan vitez na turniru nastupio sa svojim kopljem?

(b) Označimo vjerojatnost iz (a) sa p_n. Odredite $\lim_{n\to\infty} p_n$.

Rješenje.

(a) Za $i = 1, \ldots, n$ definiramo događaje

$$A_i = \{\text{na turniru je } i\text{-ti vitez nastupio sa svojim kopljem}\}.$$

Posložimo sve vitezove u niz. Koplja možemo pridružiti vitezovima na ukupno $n!$ načina (broj permutacija skupa od n elemenata). Pretpostavimo sada da su vitezovi $i_1, \ldots, i_k$ na turniru nastupili sa svojim kopljima. To znači da smo vitezovima na mjestima $i_1, \ldots, i_k$ u nizu pridružili njihova koplja, dok smo preostala koplja mogli pridružiti na ukupno $(n-k)!$ načina (permutiramo skup od $n-k$ elemenata). Dakle,

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}.$$

Općenito, za svaki k-člani podskup $I_k \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in I_k} A_j\right) = \frac{(n-k)!}{n!}.$$

Sada prema Sylvesterovoj formuli slijedi da je tražena vjerojatnost jednaka

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{I_k\subseteq\{1,\ldots,n\}\\ |I_k|=k}} (-1)^{k+1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in I_k} A_j\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!} \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{n!} \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k!}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} p_n &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k!} \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!} \\
&= 1 - e^{-1}
\end{aligned}$$

Zadatak (3.31.) U kutiji se nalazi n kuglica. Na slučajan način izvučemo neki broj kuglica. Kolika je vjerojatnost da je broj izvučenih kuglica paran?

Rješenje.
Označimo $A = \{1, \dots, n\}$. Trebamo odrediti broj podskupova skupa A s parno mnogo elemenata. Znamo da je $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|} = 2^n$ (broj svih podskupova skupa A je 2^n). Broj svih podskupova skupa A s parnim brojem elemenata odredit ćemo korištenjem sljedećih svojstava binomnih koeficijenata ($n \in \mathbb{N}, 0 < k < n$)

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1. \tag{3.1}$$

Ukoliko je n paran, broj svih podskupova od A s parnim brojem elemenata jest jednak

$$\begin{aligned} &\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots + \binom{n}{n} = \\ \overset{(3.1)}{=} &\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{4} + \ldots + \binom{n-1}{n-1} = 2^{n-1}, \end{aligned}$$

pri čemu posljednja jednakost slijedi prema binomnoj formuli. Analogno i u slučaju kad je n neparan dobijemo da je broj podskupova skupa A s parnim brojem elemenata jednak

$$\begin{aligned} &\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n-1}{n-3} + \binom{n}{n-1} = \\ \overset{(3.1)}{=} &\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \ldots + \binom{n-1}{n-4} + \binom{n-1}{n-3} \\ &+ \binom{n-1}{n-2} + \binom{n-1}{n-1} = 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Budući da u obzir uzimamo samo neprazne podskupove od A (dakle, ne promatramo $\emptyset$ koji ima paran broj elemenata), tražena je vjerojatnost jednaka

$$\frac{2^{n-1} - 1}{2^n - 1}.$$

Zadatak (3.32.) Na peronu je vlak koji se sastoji od n vagona. Ako m putnika ($m \leqslant n$) nasumce bira vagon, izračunajte vjerojatnost

(a) da je u svakom vagonu najviše jedan putnik,

(b) da je u zadnjem vagonu točno jedan putnik.

Rješenje.
m putnika možemo smjestiti u n vagona na ukupno n^m načina.

(a) Ukoliko je u svakom vagonu najviše jedan putnik, to znači da smo u točno m vagona smjestili po jednog putnika, dok su preostali vagoni prazni. Prvog putnika u vagon možemo smjestiti na n načina, drugog na $n - 1$ način (ne možemo ga smjestiti jedino u vagon u koji smo smjestili prvog putnika), trećeg na $n-2$ način i tako sve do m-tog kojeg možemo smjestiti na $n-m+1$ način. Dakle, ukupan je broj razmještaja

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!},$$

pa je tražena vjerojatnost

$$\frac{\frac{n!}{(n-m)!}}{n^m}.$$

(b) Putnika kojeg ćemo smjestiti u zadnji vagon biramo na m načina. Preostalih $m-1$ putnika smještamo u $n-1$ vagon na $(n-1)^{m-1}$ način. Zato je tražena vjerojatnost

$$\frac{m(n-1)^{m-1}}{n^m}.$$

Zadatak (3.33.) Dr. Elmex ima 10 "čudnih" pacijenata koji zbog straha od karijesa dolaze na pregled jednom tjedno. Svatko od njih na slučajan način i nezavisno od ostalih bira jedan od pet radnih dana u tjednu za posjet zubaru. Izračunajte vjerojatnost da dr. Elmexa barem jedan dan neće posjetiti ni jedan "čudni" pacijent.

Rješenje.
Za $i = 1, \ldots, 5$ definiramo događaje

$$A_i = \{\text{dr. Elmexa } i\text{-ti radni dan nije posjetio pacijent}\}.$$

Analogno kao u zadatku 3.18. (u slučaju $n = 5, m = 10$), vidimo da za svaki k-člani podskup $I_k \subseteq \{1, \ldots, 5\}$, $1 \leqslant k \leqslant 5$, vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in I_k} A_j\right) = \frac{(5-k)^{10}}{5^{10}},$$

pa prema Sylvesterovoj formuli slijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{5} A_i\right) = \binom{5}{1}\frac{4^{10}}{5^{10}} - \binom{5}{2}\frac{3^{10}}{5^{10}} + \binom{5}{3}\frac{2^{10}}{5^{10}} - \binom{5}{4}\frac{1^{10}}{5^{10}} + 0 = 0.4774528.$$

Zadatak (3.34.) Bacamo dvije simetrične kocke i dobivene ishode označimo sa A i B. Kolika je vjerojatnost da jednadžba

$$x^2 + Ax + B = 0$$

ima realna rješenja?

Rješenje.
Prostor elementarnih događaja jest

$$\Omega = \{(i,j) \colon i, j \in \{1, \ldots, 6\}\} \Rightarrow |\Omega| = 36.$$

Kvadratna jednadžba $x^2 + Ax + B = 0$ ima realna rješenja akko joj je diskriminanta $A^2 - 4B$ veća ili jednaka od nule. Zato tražimo broj elemenata skupa

$$D = \{(i,j) \in \Omega \colon i^2 - 4j \geqslant 0\}.$$

Direktnom provjerom za zadani j određujemo sve moguće i:

$$\begin{array}{ccl} j & & i \\ 1 & \to & 2,3,4,5,6 \\ 2 & \to & 3,4,5,6 \\ 3 & \to & 4,5,6 \\ 4 & \to & 4,5,6 \\ 5 & \to & 5,6 \\ 6 & \to & 5,6 \end{array}$$

Dakle, $|D| = 19$ pa je

$$\mathbb{P}(D) = \frac{19}{36} = 0.527778.$$

Zadatak (3.35.) 10 kuglica je označeno brojevima $1, 2, \ldots, 10$. Na slučajan način poredamo kuglice u red. Izračunajte vjerojatnost da se mjesto barem jedne kuglice označene parnim brojem podudara s brojem na njoj.

Rješenje.
Za $i = 1, \ldots, 5$ definiramo događaje

$$A_i = \{\text{kuglica s brojem } 2i \text{ nalazi se na mjestu } 2i\}.$$

Analogno kao u zadatku 3.30. vidimo da za svaki k-člani podskup $I_k \subseteq \{1, \ldots, 5\}$, $1 \leqslant k \leqslant 5$, vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in I_k} A_j\right) = \frac{(10-k)!}{10!},$$

pa prema Sylvesterovoj formuli slijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{5} A_i\right) = 5 \cdot \frac{9!}{10!} - \binom{5}{2}\frac{8!}{10!} + \binom{5}{3}\frac{7!}{10!} - \binom{5}{4}\frac{6!}{10!} + \frac{5!}{10!} = 0.40181878.$$

Poglavlje 4

Slučajne varijable

Zadatak (4.20.) Neka je X nenegativna cjelobrojna slučajna varijabla. Dokažite da je

$$\mathbb{E}X = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{X > n\}.$$

Rješenje.
Neka je

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & k & \dots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_k & \dots \end{pmatrix}.$$

Imamo

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=n}^{\infty} p_k}_{=\mathbb{P}\{X>n-1\}} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{X > n-1\} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\{X > n\}.$$

Zadatak (4.30.) Odredite konstantu c tako da tablica

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ \frac{cq}{1\cdot 2} & \frac{cq^2}{2\cdot 3} & \frac{cq^3}{3\cdot 4} & \dots & \frac{cq^n}{n\cdot(n+1)} & \dots \end{pmatrix}$$

bude razdioba neke slučajne varijable, pri čemu je $q \in \langle 0, 1\rangle$.

Rješenje.
Mora vrijediti

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{cq^k}{k(k+1)} = 1, \quad \frac{cq^k}{k(k+1)} \geqslant 0, \ k \in \mathbb{N}.$$

Imamo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k+1}.$$

Nadalje,

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \ / \int dq$$

$$\Rightarrow -\ln(1-q) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k}$$

$$\Rightarrow -\ln(1-q) = q + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{k+1}}{k+1} = q + q\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k+1} = -\frac{\ln(1-q)+q}{q}.$$

Sada slijedi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{cq^k}{k(k+1)} = 1 \Rightarrow \frac{1}{c} = -\ln(1-q) + \frac{\ln(1-q)+q}{q}$$

$$\Rightarrow c = \frac{q}{(1-q)\ln(1-q)+q}.$$

Zadatak (4.31.) Neka su $X \sim P(\lambda)$ i $Y \sim P(\mu)$ nezavisne slučajne varijable, gdje su $\lambda, \mu > 0$. Odredite distribuciju od $X+Y$.

Rješenje.
X, Y primaju vrijenosti u $\mathbb{N}_0 \Rightarrow X+Y$ prima vrijednosti u $\mathbb{N}_0$. Neka je $n \in \mathbb{N}_0$ proizvoljan. Imamo

$$\mathbb{P}\{X+Y=n\} = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} \{X=k, Y=n-k\}\right) = (\text{konačna aditivnost}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\{X=k, Y=n-k\} = (\text{nezavisnost}) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\{X=k\}\mathbb{P}\{Y=n-k\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\mu}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} = e^{-(\lambda+\mu)}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}\lambda^k\mu^{n-k} =$$

$$= e^{-(\lambda+\mu)}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^k\mu^{n-k} = e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}$$

$\Rightarrow X+Y \sim P(\lambda+\mu)$

Napomena. $X_1 \sim P(\lambda_1), \ldots, X_n \sim P(\lambda_n)$ nezavisne $\Rightarrow X_1+\ldots+X_n \sim P(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)$

Zadatak (4.33.) Neka je X slučajna varijabla takva da $\mathbb{P}\{X=1\} = p = 1-\mathbb{P}\{X=-1\}$. Nađite $c \neq 1$ takav da je $\mathbb{E}\left[c^X\right] = 1$.

Rješenje.
Zakon razdiobe od X:

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c^X \sim \begin{pmatrix} c^{-1} & c \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E}\left[c^X\right] = 1 \Rightarrow (1-p)c^{-1} + pc = 1$$

$$pc^2 - c + (1-p) = 0$$

$$c = \frac{1 \pm \sqrt{1-4p(1-p)}}{2p} = \frac{1 \pm |1-2p|}{2p}$$

Rješenje $c=1$ odbacujemo zbog uvjeta zadatka pa je jedino rješenje $c = \frac{1-p}{p}$.

Zadatak (4.34.) Bacaju se dvije simetrične kocke i rezultati se zbroje. Izračunajte očekivanje i varijancu dobivenog zbroja.

Rješenje.
Neka je X zbroj brojeva na kockama. Slučajna varijabla X prima vrijednosti u skupu $\{2,\dots,12\}$. Prikažimo sve moguće kombinacije brojeva na kockama i njihovih zbrojeva tablicom:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Sada iz dobivene tablice možemo odrediti zakon razdiobe od X:

$$X \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$$

Slijedi

$$\mathbb{E}X = 14 \cdot \frac{1+2+3+4+5}{36} + 7 \cdot \frac{6}{36} = 7.$$

Nadalje,
$\mathbb{E}\left[X^2\right] = (4+144)\cdot\frac{1}{36} + (9+121)\cdot\frac{2}{36} + (16+100)\cdot\frac{3}{36} + (25+81)\cdot\frac{4}{36} + (36+64)\cdot\frac{5}{36} + 49\cdot\frac{6}{36} = \frac{329}{6}$,

$$\Rightarrow \operatorname{Var} X = \mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{35}{6}.$$

Zadatak (4.35.) Neka je X slučajna varijabla takva da je $\operatorname{Var} X < \infty$. Dokažite da funkcija $a \mapsto \mathbb{E}\left[(X-a)^2\right]$ poprima jedinstveni minimum u točki $a = \mathbb{E}X$.

Rješenje.
Vrijedi $\operatorname{Var} X < \infty \Rightarrow \mathbb{E}\left[X^2\right], \mathbb{E}X < \infty$. Sada imamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[(X-a)^2\right] &= \mathbb{E}\left[X^2 - 2aX + a^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - 2a\mathbb{E}X + a^2 \\ &= \left(a^2 - 2a\mathbb{E}X + (\mathbb{E}X)^2\right) + \mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}X)^2 = (a-\mathbb{E}X)^2 + \operatorname{Var} X. \end{aligned}$$

Dakle, očito je da zadana funkcija poprima minimalnu vrijednost $\operatorname{Var} X$ u točki $a = \mathbb{E}X$.

Zadatak (4.38.) Iz skupa $\{1,2,\dots,n\}$ biramo dva broja (možemo 2 puta izabrati isti broj). Označimo sa X veći od brojeva. Izračunajte $\mathbb{E}X$.

Rješenje.
X prima vrijednosti u skupu $\{1,2,\dots,n\}$. Za proizvoljan $k \in \{1,\dots,n\}$, tražimo sve parove brojeva iz tog skupa za koje je k veći član para. To su parovi oblika (j,k) i (k,j), pri čemu je $j = 1,\dots,k-1$ te (k,k). Zato ih ima $2(k-1)+1 = 2k-1$. Budući da je ukupan broj parova n^2, imamo

$$\mathbb{P}\{X = k\} = \frac{2k-1}{n^2}.$$

Sada je

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k(2k-1)}{n^2} \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} 2k^2 - k \\
&= \frac{1}{n^2} \left(2 \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k \right) \\
&= \frac{1}{n^2} \left(2 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
&= \frac{n+1}{n} \left(\frac{2n+1}{3} - \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{n+1}{n} \cdot \frac{4n+2-3}{6} \\
&= \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}
\end{aligned}$$

Zadatak (4.39.) Neka su X i Y nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable s očekivanjem μ i varijancom σ^2. Izračunajte $\mathbb{E}\left[(X-Y)^2\right]$.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(X-Y)^2\right] &= \mathbb{E}\left[X^2 - XY - YX + Y^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[YX] + \mathbb{E}\left[Y^2\right] \\
&= (\text{nezavisnost}) \\
&= \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y - \mathbb{E}Y\mathbb{E}X + \mathbb{E}\left[Y^2\right] \\
&= (\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = \mu) \\
&= \mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}X)^2 + \mathbb{E}\left[Y^2\right] - (\mathbb{E}Y)^2 \\
&= (\operatorname{Var} X = \mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}X)^2) \\
&= \operatorname{Var} X + \operatorname{Var} Y \\
&= \sigma^2 + \sigma^2 \\
&= 2\sigma^2
\end{aligned}$$

Zadatak (4.40.) Nađite parametar p slučajne varijable X s geometrijskom distribucijom ako za nju vrijedi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left\{X^2 > n\right\} = 1.$

Rješenje.
X^2 je nenegativna (dapače, pozitivna) cjelobrojna slučajna varijabla pa imamo (zadatak 4.20.)

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left\{X^2 > n\right\} = \underbrace{\mathbb{P}\left\{X^2 > 0\right\}}_{=1} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left\{X^2 > n\right\} = 1 + 1 = 2.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}\operatorname{Var} X &= \mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}X)^2 \\ \Rightarrow \frac{1}{p} &= 2 - \frac{1-p}{p^2} \\ \Rightarrow p &= \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Napomena. Neka je $X \sim G(p)$ geometrijska slučajna varijabla s parametrom p. Tada je njeno očekivanje

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p = p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

Nadalje,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X(X-1)\right] &= \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-1}p = pq\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} \\ &= pq \cdot \frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2q}{p^2},\end{aligned}$$

pa za varijancu od X imamo

$$\operatorname{Var} X = \mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}\left[X(X-1)\right] + \mathbb{E}X - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Var} X = \frac{1-p}{p^2}.$$

Zadatak (4.41.) Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable koje poprimaju vrijednosti u skupu $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Pretpostavimo da je $\mathbb{E}X < \infty$.

(a) Pokažite da postoji očekivanje slučajne varijable $\min\{X, Y\}$.

(b) Pokažite da vrijedi

$$\mathbb{E}[\min\{X, Y\}] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n)\mathbb{P}(Y > n).$$

Rješenje.

(a) Neka je $\Omega = \{\omega_k \colon k \in K \subseteq \mathbb{N}\}$ prostor elementarnih događaja. Tada (prema definiciji matematičkog očekivanja s predavanja) red

$$\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\omega)$$

apsolutno konvergira i njegova je suma jednaka $\mathbb{E}X$. S druge strane, zbog

$$\min\{X, Y\}(\omega) \leqslant X(\omega), \quad \omega \in \Omega,$$

slijedi da je red $\sum_{\omega \in \Omega} \min\{X, Y\}(\omega)\mathbb{P}(\omega)$ majoriziran konvergentnim redom $\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\omega)$ pa je po usporednom kriteriju i sam konvergentan (a time i apsolutno konvergentan jer je to red s nenegativnim članovima). Dakle, slučajna varijabla $\min\{X, Y\}$ ima očekivanje.

(b) Budući da su X i Y nenegativne cjelobrojne slučajne varijable, slučajna varijabla $\min\{X,Y\}$ je također nenegativna i cjelobrojna. Zato prema zadatku 4.20. vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\min\{X,Y\}] &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\min\{X,Y\} > n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{X > n\} \cap \{Y > n\}) \\
&= [\text{koristimo pretpostavku o nezavisnosti } X \text{ i } Y] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n)\mathbb{P}(Y > n)
\end{aligned}$$

Zadatak (4.43.) Neka su X i Y diskretne slučajne varijable takve da je $\mathbb{P}(|X-Y| \leqslant M) = 1$ za neki $M \in \mathbb{R}$ i da slučajna varijabla X ima očekivanje.

(a) Pokažite da slučajna varijabla Y ima očekivanje.

(b) Pokažite da vrijedi
$$|\mathbb{E}X - \mathbb{E}Y| \leqslant M.$$

Rješenje.

(a) Uočimo da zbog $\mathbb{P}(|X-Y| \leqslant M) = 1$ imamo
$$|X-Y| \leqslant M \Leftrightarrow -M \leqslant X - Y \leqslant M.$$

Neka je
$$X - Y \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}.$$

Red $\sum |a_i p_i| = \sum |a_i| p_i$ je majoriziran redom $\sum M p_i$ koji je konvergentan: $\sum_{i=1}^{\infty} M p_i = M \sum_{i=1}^{\infty} p_i = M < \infty$.

$\Rightarrow$ Po usporednom kriteriju red $\sum |a_i p_i|$ konvergira pa red $\sum a_i p_i$ apsolutno konvergira, odnosno slučajna varijabla $X - Y$ ima očekivanje. Sada slijedi da postoji
$$\mathbb{E}X - \mathbb{E}[X-Y] = \mathbb{E}[X - (X-Y)] = \mathbb{E}Y < \infty,$$

tj. slučajna varijabla Y ima očekivanje.

(b) Imamo
$$\begin{gathered}
-M \leqslant X - Y \leqslant M, \ /\mathbb{E} \\
-M \leqslant \mathbb{E}[X-Y] \leqslant M, \\
|\mathbb{E}[X-Y]| \leqslant M, \\
|\mathbb{E}X - \mathbb{E}Y| \leqslant M,
\end{gathered}$$

pri čemu smo koristili da je matematičko očekivanje monotono i linearno te da je očekivanje konstante jednako toj konstanti.

Zadatak (4.44.) Neka je X geometrijska slučajna varijabla s parametrom p. Pokažite da je

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right] = -\frac{p\ln p}{1-p}.$$

Rješenje.
Imamo

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{k-1}p}{k} = \frac{p}{q}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^k}{k} = \frac{p}{q}\cdot(-\ln(1-q)) = -\frac{p\ln p}{1-p}.$$

Zadatak (4.45.) Neka je $X \sim P(\lambda)$. Pokažite da je

$$\mathbb{E}\left[X^n\right] = \lambda\mathbb{E}\left[(X+1)^{n-1}\right]$$

i izračunajte $\mathbb{E}\left[X^3\right]$.

Rješenje.

$$\mathbb{E}\left[X^n\right] = \sum_{k=0}^{\infty} k^n e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k^n e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{n-1} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$= \lambda\sum_{k=1}^{\infty} k^{n-1} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^{n-1} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda\mathbb{E}\left[(X+1)^{n-1}\right].$$

Sada primjenjujući upravo dokazanu jednakost dobivamo

$$\mathbb{E}\left[X^3\right] = \lambda\mathbb{E}\left[(X+1)^2\right] = \lambda\mathbb{E}\left[X^2+2x+1\right] =$$

$$\lambda\left(\mathbb{E}\left[X^2\right]+2\mathbb{E}X+1\right) = \lambda\left(\lambda\mathbb{E}\left[X+1\right]+2\lambda+1\right) =$$

$$\lambda\left(\lambda\mathbb{E}X+\lambda+2\lambda+1\right) = \lambda\left(\lambda^2+3\lambda+1\right)$$

Zadatak (4.46.) Pretpostavite da igrate igru u kojoj pobjeđujete s vjerojatnošću p. Igrate 5 igara i ako pobijedite u petoj igri, nastavljate igrati sve dok ne izgubite.

(a) Nađite očekivani broj igara koje ćete odigrati.

(b) Nađite očekivani broj igara koje ćete izgubiti.

Rješenje.

(a) Neka je X broj igara koji ćemo odigrati. Imamo

$$X \sim \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & \dots & 5+k & \dots \\ 1-p & p(1-p) & p^2(1-p) & \dots & p^k(1-p) & \dots \end{pmatrix}.$$

(naime, da bismo odigrali točno $5+k$ igara, moramo izgubiti u posljednjoj, a pobijediti u svakoj od pete do predzadnje - za prve 4 je svejedno pobijedimo

li ili izgubimo)
Sada je

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \sum_{k=0}^{\infty}(5+k)p^k(1-p) \\
&= (1-p)\left(\sum_{k=0}^{\infty}5p^k + \sum_{k=0}^{\infty}kp^k\right). \\
&= (1-p)\left(\frac{5}{1-p} + \frac{p}{(1-p)^2}\right) \\
&= 5 + \frac{p}{1-p}
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{1-p} = \sum_{k=0}^{\infty}p^k \;/\frac{d}{dp} \Rightarrow \frac{1}{(1-p)^2} = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{\infty}kp^k\right)$$

(b) Neka je Y broj igara koje ćemo izgubiti. Uočimo da Y prima vrijednosti u skupu $\{1, \ldots, 5\}$ (naime, mogli smo izgubiti najviše jednu igru od pete nadalje i prve četiri - to je ukupno 5, a najmanje smo izgubili jednu igru, i to od pete nadalje). Sada promatramo slučajeve:

1° $Y = 1$

Sve smo prve 4 igre pobijedili, zatim smo pobijedili još k igara ($\in \mathbb{N}_0$) i onda jednu izgubli. Dakle,

$$\mathbb{P}\{Y=1\} = \sum_{k=0}^{\infty}p^{4+k}(1-p) = p^4(1-p)\frac{1}{1-p} = p^4.$$

2° $Y = 2$

U prve 4 igre smo izgubili jednu - biramo ju na $\binom{4}{1}$ načina, zatim smo pobijedili u k i onda jednu izgubli:

$$\mathbb{P}\{Y=2\} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{4}{1}p^{3+k}(1-p)^2 = \binom{4}{1}p^3(1-p)^2\cdot\frac{1}{1-p} = \binom{4}{1}p^3(1-p).$$

Analogno za $Y = 3, 4, 5$ pa imamo

$$Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ p^4 & \binom{4}{1}p^3(1-p) & \binom{4}{2}p^2(1-p)^2 & \binom{4}{3}p^3(1-p) & (1-p)^4 \end{pmatrix}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}Y &= \sum_{k=1}^{5}k\binom{4}{k-1}p^{5-k}(1-p)^{k-1} \\
&= +\begin{cases} p^4 \\ -8p^4+8p^3 \\ 18p^4-36p^3+18p^2 \\ -16p^4+48p^3-48p^2+16p \\ 5p^4-20p^3+30p^2-20p+5 \end{cases} \\
&= 5-4p.
\end{aligned}$$

Poglavlje 5

Slučajni vektori

Zadatak (5.6.) Slučajna varijabla X ima razdiobu

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

i $Y = X^2$.

(a) Nađite razdiobu slučajnog vektora (X, Y).

(b) Jesu li slučajne varijable X i Y nezavisne?

(c) Odredite koeficijent korelacije slučajnih varijabli X i Y.

Rješenje.
Vrijedi

$$Y = X^2 \Rightarrow Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(a)

$X \setminus Y$	0	1	Σ
-1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
Σ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

(b) Vrijedi: X, Y nezavisne $\Leftrightarrow f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Budući da je

$$f_{X,Y}(-1, 0) = 0 \neq \frac{1}{8} = f_X(-1) f_Y(0),$$

X i Y nisu nezavisne.

(c) Imamo

$$X^3 \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad X^4 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

pa imamo

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y = \mathbb{E}\left[X^3\right] - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y = 0 - 0 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Dakle,

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}\, X}\sqrt{\mathrm{Var}\, Y}} = 0.$$

Zadatak (5.7.) Neka su X, Y i Z slučajne varijable i $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Pokažite da vrijedi

(a) $\operatorname{Cov}(aX + b, cY + d) = ac \operatorname{Cov}(X, Y)$

(b) $\operatorname{Cov}(aX + bY, Z) = a \operatorname{Cov}(X, Z) + b \operatorname{Cov}(Y, Z)$

(c) $\operatorname{Var}(X + Y) = \operatorname{Var} X + \operatorname{Var} Y + 2 \operatorname{Cov}(X, Y)$

Rješenje.

(a) $\operatorname{Cov}(aX + b, cY + d) =$
$\mathbb{E}[(aX + b)(cY + d)] - \mathbb{E}[aX + b]\mathbb{E}[cX + d] =$
$\mathbb{E}[acXY + adX + bcY + bd] - (a\mathbb{E}X + b)(c\mathbb{E}Y + d) =$
$ac\mathbb{E}[XY] + ad\mathbb{E}X + bc\mathbb{E}Y + bd - ac\mathbb{E}x\mathbb{E}Y - ad\mathbb{E}X - bc\mathbb{E}Y - bd =$
$ac(\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y) =$
$ac \operatorname{Cov}(X, Y)$

(b) $\operatorname{Cov}(aX + bY, Z) =$
$\mathbb{E}[(aX + bY)Z] - \mathbb{E}[aX + bY]\mathbb{E}Z =$
$a\mathbb{E}[XZ] + b\mathbb{E}[YZ] - a\mathbb{E}X\mathbb{E}Z - b\mathbb{E}Y\mathbb{E}Z =$
$a(\mathbb{E}[XZ] - \mathbb{E}X\mathbb{E}Z) + b(\mathbb{E}[YZ] - \mathbb{E}Y\mathbb{E}Z) =$
$a \operatorname{Cov}(X, Z) + b \operatorname{Cov}(Y, Z)$

(c) $\operatorname{Var}(X + Y) =$
$\mathbb{E}\left[(X + Y)^2\right] - \left(\mathbb{E}[X + Y]\right)^2 =$
$\mathbb{E}\left[X^2\right] + 2\mathbb{E}[XY] + \mathbb{E}\left[Y^2\right] - (\mathbb{E}X)^2 - 2\mathbb{E}X\mathbb{E}Y - (\mathbb{E}Y)^2 =$
$\mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}X)^2 + 2(\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y) + \mathbb{E}\left[Y^2\right] - (\mathbb{E}Y)^2 =$
$\operatorname{Var} X + 2 \operatorname{Cov}(X, Y) + \operatorname{Var} Y$

Zadatak (5.8.) Za sljedeće funkcije $f \colon \mathbb{R} \to [0, \infty\rangle$ nađite $c \in \mathbb{R}$ tako da one budu funkcije gustoće neke slučajne varijable. Izračunajte očekivanja tih slučajnih varijabli.

(a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c2^x}{x!} & , x \in \mathbb{N} \\ 0 & ,\text{inače} \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x(x+1)} & , x \in \mathbb{N} \\ 0 & ,\text{inače} \end{cases}$$

Rješenje.

(a) Mora vrijediti

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{c2^x}{x!} = c \sum_{x=1}^{\infty} \frac{2^x}{x!} = 1$$

Imamo

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{2^x}{x!} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{2^x}{x!} - 1 = e^2 - 1$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{e^2-1}$$

Računamo očekivanje

$$\mathbb{E}X = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{e^2-1} \cdot \frac{2^x}{x!} \cdot x = \frac{2}{e^2-1} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{2^x}{x!} = \frac{2e^2}{e^2-1}$$

(b)

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{c}{x(x+1)} = c \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = c \left(\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x} - \sum_{x=2}^{\infty} \frac{1}{x} \right) = 1$$

$$\Rightarrow c = 1$$

Za očekivanje imamo

$$\mathbb{E}X = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{x}{x(x+1)} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x+1}$$

pa vidimo da ne postoji $\mathbb{E}X$ (naime, dobiveni red je harmonijski red koji je divergentan).

Zadatak (5.9.) Funkcija gustoće slučajnog vektora (X, Y, Z) je dana s

$$f(1,2,3) = f(2,1,1) = f(2,2,1) = f(2,3,2) = 0.25.$$

Izračunajte:

(a) $\mathbb{E}[XYZ]$

(b) $\mathbb{E}[XY + YZ + ZX]$

Rješenje.

(a) $\mathbb{E}[XYZ] = \sum_{x,y,z} xyzf(x,y,z) = 6 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0.25 + 4 \cdot 0.25 + 12 \cdot 0.25 = 6$

(b) Odredimo funkcije gustoće slučajnih vektora (X, Y), (X, Z), (Y, Z):

$$f_{X,Y}(1,2) = f_{X,Y}(2,1) = f_{X,Y}(2,2) = f_{X,Y}(2,3) = \frac{1}{4},$$

$$f_{X,Z}(1,3) = f_{X,Z}(2,2) = \frac{1}{4}, \quad f_{X,Y}(2,1) = \frac{1}{2},$$

$$f_{Y,Z}(2,3) = f_{Y,Z}(1,1) = f_{Y,Z}(2,1) = f_{Y,Z}(3,1) = \frac{1}{4}.$$

Sada je

$$\mathbb{E}[XY] = \sum_{x,y} xyf_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{4}(2+2+4+6) = \frac{7}{2},$$

$$\mathbb{E}[XZ] = \sum_{x,z} xzf_{X,Z}(x,z) = \frac{1}{4}(3+4) + \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{11}{4},$$

$$\mathbb{E}[YZ] = \sum_{y,z} yzf_{Y,Z}(y,z) = \frac{1}{4}(6+1+2+6) = \frac{15}{4},$$

pa slijedi

$$\mathbb{E}[XY + XZ + YZ] = 10.$$

Zadatak (5.10.) Slučajni vektor (X, Y) ima razdiobu

$X \setminus Y$	$-a$	0	a
$-a$	0	0.25	0
0	0.25	0	0.25
a	0	0.25	0

Pokažite da su slučajne varijable $X + Y$ i $X - Y$ nezavisne.

Rješenje.
Iz tablice razdiobe slučajnog vektora (X, Y) dobijemo razdiobe od $X + Y$ i $X - Y$:

$$X + Y \sim \begin{pmatrix} -a & a \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad X - Y \sim \begin{pmatrix} -a & a \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix},$$

a zatim i razdiobu slučajnog vektora $(X + Y, X - Y)$:

$X + Y \setminus X - Y$	$-a$	a	Σ
$-a$	0.25	0.25	0.5
a	0.25	0.25	0.5
Σ	0.5	0.5	1

(Na primjer, $\{X + Y = a, X - Y = -a\} = \{X = 0, Y = a\}$.)
Sada se iz tablice distribucije vektora $(X + Y, X - Y)$ lako vidi da su slučajne varijable $X + Y$ i $X - Y$ nezavisne jer za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f_{X+Y,X-Y}(x, y) = f_{X+Y}(x) f_{X-Y}(y).$$

Zadatak (5.11.) Neka je X slučajna varijabla s funkcijom distribucije

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{1}{4} & , 0 \leqslant x < 1 \\ \frac{1}{2} & , 1 \leqslant x < 2 \\ 1 & , x \geqslant 2 \end{cases}$$

i neka je $Y = X^2$. Izračunajte

(a) $\mathbb{P}(0.5 \leqslant X \leqslant 1.5)$

(b) $\mathbb{P}(Y \leqslant X)$

(c) $\mathbb{P}(X + Y \leqslant 0.75)$

Rješenje.
Za zakone razdiobe od X i Y vrijedi

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Sada imamo

(a) $\mathbb{P}(0.5 \leqslant X \leqslant 1.5) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{4}$

(b) $\mathbb{P}(Y \leqslant X) = \mathbb{P}(X(X - 1) \leqslant 0) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{2}$

(c) $\mathbb{P}(X+Y \leqslant 0.75) = \mathbb{P}((X+\frac{1}{2})^2 \leqslant 1) = \mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{4}$

Zadatak (5.12.) Neka su X_1, X_2, X_3, X_4 i X_5 nezavisne slučajne varijable s varijancom σ^2. Izračunajte:

(a) $\operatorname{Cov}(X_1+X_2, X_4+X_5)$

(b) koeficijent korelacije između slučajnih varijabli $X_1+X_2+X_3$ i $X_3+X_4+X_5$.

Rješenje.

(a) Koristimo zadatak 5.7.(b):

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X_1+X_2, X_4+X_5) &= \operatorname{Cov}(X_1, X_4+X_5) + \operatorname{Cov}(X_2, X_4+X_5) = \\ &= \operatorname{Cov}(X_4+X_5, X_1) + \operatorname{Cov}(X_4+X_5, X_2) = \\ &= \operatorname{Cov}(X_4, X_1) + \operatorname{Cov}(X_5, X_1) + \operatorname{Cov}(X_4, X_2) + \operatorname{Cov}(X_5, X_2) = \\ &= (\text{nezavisnost} \Rightarrow \text{nekoreliranost}) = 0\end{aligned}$$

(b) Koristeći (a) dio i zadatak 5.7.(b) dobivamo da vrijedi

$$\operatorname{Cov}(X_1+X_2+X_3, X_3+X_4+X_5) = \operatorname{Cov}(X_3, X_3) = \operatorname{Var} X_3 = \sigma^2,$$

pa slijedi

$$\rho = \frac{\operatorname{Cov}(X_1+X_2+X_3, X_3+X_4+X_5)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X_1+X_2+X_3)\operatorname{Var}(X_3+X_4+X_5)}} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{3\sigma^2 \cdot 3\sigma^2}} = \frac{1}{3}.$$

Napomena. Vrijedi $\operatorname{Cov}(X, X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2 = \operatorname{Var} X$.

Zadatak (5.13.) Bacamo dvije simetrične kocke. Neka je X manji, a Y veći broj koji je pao na kockama. Odredite $\mathbb{E}[X|Y]$.

Rješenje.
Najprije odredimo tablicu distribucije slučajnog vektora (X, Y):

$X \setminus Y$	1	2	3	4	5	6	Σ
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{11}{36}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{9}{36}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{7}{36}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{5}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
Σ	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

Sada za $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ imamo:

$$\mathbb{E}[X|Y=n] = \frac{1}{f_Y(n)} \sum_{x=1}^{6} x f_{X,Y}(x, n) = \frac{n \cdot \frac{1}{36} + (1+2+\ldots+(n-1)) \cdot \frac{2}{36}}{\frac{2n-1}{36}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{36}n + \frac{2}{36} \cdot \frac{(n-1)n}{2}}{\frac{2n-1}{36}} = \frac{n+n^2-n}{2n-1} = \frac{n^2}{2n-1}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X|Y] = \frac{Y^2}{2Y-1}$$

Zadatak (5.14.) Neka su X i Y slučajne varijable takve da je $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = 0$ i $\operatorname{Var} X = \operatorname{Var} Y = 1$. Ako je $\rho = \rho(X, Y)$, pokažite nejednakosti

(a) $\mathbb{E}[\max\{X^2, Y^2\}] \leqslant 1 + \sqrt{1-\rho^2}$

(b) $\mathbb{E}[\min\{X^2, Y^2\}] \geqslant 1 - \sqrt{1-\rho^2}$

(Uputa: $\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$, $\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$)

Rješenje.

(a) Imamo

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y = \mathbb{E}[XY]\\ &\Rightarrow \rho = \mathbb{E}[XY]\\ &\Rightarrow \mathbb{E}[X^2] = \operatorname{Var} X - (\mathbb{E}X)^2 = 1 = \mathbb{E}[Y^2]\end{aligned}$$

Vrijedi

$$\mathbb{E}[\max\{X^2, Y^2\}] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[X^2] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[Y^2] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[|X^2 - Y^2|] = 1 + \frac{1}{2}\mathbb{E}[|X^2 - Y^2|],$$

pa zadana nejednakost postaje

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}[|X^2 - Y^2|] \leqslant \sqrt{1 - (\mathbb{E}[XY])^2}. \tag{5.1}$$

Primjenom Cauchyjeve nejednakosti za matematičko očekivanje dobivamo

$$\mathbb{E}[|X^2 - Y^2|] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[|X + Y| \cdot |X - Y|] \leqslant \sqrt{\mathbb{E}[(X + Y)^2] \cdot \mathbb{E}[(X - Y)^2]},$$

pa da bi vrijedila nejednakost (5.1), dovoljno je pokazati

$$\frac{1}{2}\sqrt{\mathbb{E}[(X + Y)^2] \cdot \mathbb{E}[(X - Y)^2]} \leqslant \sqrt{1 - (\mathbb{E}[XY])^2}$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}[X^2 + 2XY + Y^2] \cdot \mathbb{E}[X^2 - 2XY + Y^2] \leqslant 4 - 4(\mathbb{E}[XY])^2$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{c}(\mathbb{E}[X^2])^2 - 2\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[XY] + \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]\\ 2\mathbb{E}[Y^2]\mathbb{E}[X^2] - 4(\mathbb{E}[XY])^2 + 2\mathbb{E}[XY]\mathbb{E}[Y^2]\\ \mathbb{E}[Y^2]\mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2] + (\mathbb{E}[Y^2])^2\end{array}\right\}+ \quad \leqslant 4 - 4(\mathbb{E}[XY])^2$$

$$(\mathbb{E}[X^2])^2 + 2\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2] + (\mathbb{E}[Y^2])^2 \leqslant 4$$

$$(\mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[Y^2])^2 \leqslant 4$$

$$\Leftrightarrow 4 \leqslant 4$$

(b) Ova je nejednakost ekvivalentna nejednakosti (5.1) iz (a) dijela zadatka pa također vrijedi.

Poglavlje 6

Neprekidne slučajne varijable

Zadatak (6.25.) Neprekidna slučajna varijabla X ima funkciju gustoće

$$f(x) = \begin{cases} ax + bx^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$

i vrijedi $\mathbb{E}X = 0.5$..

(a) Izračunajte $\mathbb{P}(X < 0.5)$.

(b) Izračunajte $\operatorname{Var} X$.

Rješenje.
Vrijedi

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{a}{2} + \frac{b}{3} = 1,$$

$$\mathbb{E}X = \int_0^1 xf(x)dx = \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{4}x^4\Big|_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{b}{4} = 0.5$$

$$\Rightarrow a = 6, b = -6.$$

Sada imamo:

(a) $\mathbb{P}(X < 0.5) = \int_0^1 6x - 6x^2 dx = \frac{1}{2}$

(b) $\operatorname{Var} X = \int_0^1 (x - 0.5)^2(6x - 6x^2)dx = \frac{1}{20}$

Zadatak (6.27.) Na nekom ispitu su bodovi normalno distribuirani s očekivanjem 76 i standardnom devijacijom 15. Najboljih 15% studenata dobije ocjenu 5, a najlošijih 10% studenata ocjenu 1. Nađite:

(a) najmanji broj bodova potreban za ocjenu 5,

(b) najmanji broj bodova potreban za prolaz.

Rješenje.
Neka je X broj bodova studenta na ispitu. Tada $X \sim \mathrm{N}(76, 15^2)$.

(a) Tražimo najmanji broj n takav da $\mathbb{P}(X > n) \leqslant 0.15$ (najviše 15% studenata dobije ocjenu 5). Imamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > n) \leqslant 0.15 &\Rightarrow \mathbb{P}(X < n) \geqslant 0.85 \\ &\Rightarrow \mathbb{P}\left(\frac{X-76}{15} < \frac{n-76}{15}\right) \geqslant 0.85 \\ &\Rightarrow \Phi\left(\frac{n-76}{15}\right) \geqslant \Phi(1.03) \\ &\Rightarrow \frac{n-76}{15} \geqslant 1.03 \\ &\Rightarrow n \geqslant 91.45 \end{aligned}$$

Najmanji broj bodova potreban za ocjenu 5 je 92.

(b) Tražimo najmanji broj n takav da $\mathbb{P}(X > n) \leqslant 0.9$ (najviše 90% studenata prođe na ispitu). Imamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > n) \leqslant 0.9 &\Rightarrow \mathbb{P}(X < n) \geqslant 0.1 \\ &\Rightarrow \mathbb{P}\left(\frac{X-76}{15} < \frac{n-76}{15}\right) \geqslant 0.1 \\ &\Rightarrow \Phi\left(\frac{n-76}{15}\right) \geqslant 0.1 = 1 - 0.9 \geqslant 1 - \Phi(1.29) \\ &\Rightarrow \Phi\left(\frac{n-76}{15}\right) \geqslant \Phi(-1.29) \\ &\Rightarrow \frac{n-76}{15} \geqslant -1.29 \\ &\Rightarrow n \geqslant 56.65 \end{aligned}$$

Najmanji broj bodova potreban za prolaz je 57.

Zadatak (6.28.) Neprekidna slučajna varijabla ima jediničnu **Cauchyevu razdiobu** ako joj je gustoća

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \ x \in \mathbb{R}.$$

(a) Postoji li $\mathbb{E}X$?

(b) Pokažite da $Y = \frac{1}{X}$ također ima jediničnu Cauchyevu razdiobu.

Rješenje.

(a) Varijabla X ima očekivanje ako i samo ako

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx \text{ konvergira}$$

$$\Leftrightarrow \int_{1}^{\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx + \int_{-\infty}^{1} \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx \text{ konvergira.}$$

No vrijedi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{\pi(1+x^2)}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\pi(1+x^2)} = \frac{1}{\pi} \in \langle 0, \infty\rangle,$$

a kako nepravi integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ divergira, prema graničnom kriteriju slijedi da nepravi integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{\pi(1+x^2)}dx$ također divergira. Dakle, ne postoji $\mathbb{E}X$.

(b) Trebamo odrediti koliko je $\mathbb{P}(\frac{1}{X} \leqslant x)$ za $x \in \mathbb{R}$. Razlikujemo slučajeve:

1° $x > 0$

$$\mathbb{P}(\frac{1}{X} \leqslant x) = \mathbb{P}\left(X \geqslant \frac{1}{x}\right) + \mathbb{P}(X \leqslant 0) = \int_{1/x}^\infty \frac{1}{\pi(1+t^2)}dt + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\pi(1+t^2)}dt$$

Nadalje,

$$\int_{1/x}^\infty \frac{1}{\pi(1+t^2)}dt = \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{y} \\ dt = -\frac{1}{y^2}dy \end{array}\right] = -\int_x^0 \frac{1}{\pi(1+y^2)}dy = \int_0^x \frac{1}{\pi(1+y^2)}dy,$$

pa slijedi

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{X} \leqslant x\right) = \int_0^x \frac{1}{\pi(1+t^2)}dt + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\pi(1+t^2)}dt =$$

$$= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\pi(1+t^2)}dt = \mathbb{P}(X \leqslant x).$$

2° $x = 0$

Vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{X} \leqslant 0\right) = \mathbb{P}(X \leqslant 0).$$

3° $x > 0$

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{X} \leqslant x\right) = \mathbb{P}\left(0 \geqslant X \geqslant \frac{1}{x}\right) = \int_{1/x}^0 \frac{1}{\pi(1+t^2)}dt =$$

$$= \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{y} \\ dt = -\frac{1}{y^2}dy \end{array}\right] = -\int_x^{-\infty} \frac{1}{\pi(1+y^2)}dy = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\pi(1+y^2)}dy = \mathbb{P}(X \leqslant x).$$

Dakle, $Y = \frac{1}{X}$ ima jediničnu Cauchyevu razdiobu.

Napomena. Divergencija integrala iz (a) dijela prethodnog zadatka može se pokazati i direktnim računom. Granični kriterij koji je korišten u rješenju zadatka glasi:
Neka su $f, g\colon [a,\infty\rangle \to \langle 0,\infty\rangle$ dvije funkcije koje su R-integrabilne na svakom segmentu $[a, b], b > a$. Pretpostavimo da postoji limes

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \in \langle 0, \infty\rangle.$$

Tada nepravi integral $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ konvergira ako i samo ako nepravi integral $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ konvergira.

Zadatak (6.30.) Godišnje padaline (u cm) u nekom području su normalno distribuirane s očekivanjem 40 i standardnom devijacijom 4. Izračunajte vjerojatnost da će trebati barem 10 godina da količina padalina prijeđe 50 cm.

Rješenje.
X = godišnja količina padalina $\Rightarrow X \sim \text{N}(40, 4^2)$
Tražimo vjerojatnost da količina u barem 10 godina ne prijeđe 50 cm. Vjerojatnost da se to dogodi u jednoj godini je

$$\mathbb{P}(X \leqslant 50) = \mathbb{P}\left(\frac{X-40}{4} \leqslant 2.5\right) = \Phi(2.5) = 0.9938,$$

pa je tražena vjerojatnost

$$\mathbb{P} = (0.9938)^{10}.$$

Zadatak (6.33.) Slučajna varijabla ima gustoću

$$f(x) = (\alpha - 1)x^{-\alpha},\ x \geqslant 1,$$

gdje je $\alpha > 1$ konstanta. Izračunajte $\mathbb{E}X$.

Rješenje.
Imamo

$$\mathbb{E}X = \int_1^\infty x f(x) dx = (\alpha - 1)\int_1^\infty x^{1-\alpha} dx.$$

Općenito, nepravi integral $\displaystyle\int_a^\infty x^\beta dx$, $a > 0$, konvergira za $\beta < -1$, dok za $\beta \geqslant -1$ divergira. Dakle, $\mathbb{E}X$ postoji za $1 - \alpha < -1$, odn. $\alpha > 2$ i u tom je slučaju

$$\mathbb{E}X = (\alpha - 1)\int_1^\infty x^{1-\alpha} dx = \frac{\alpha - 1}{2 - \alpha} x^{2-\alpha}\Big|_1^\infty = \frac{\alpha - 1}{2 - \alpha}(0 - 1) = \frac{1 - \alpha}{2 - \alpha}.$$

Zadatak (6.34.) Pretpostavimo da X ima jediničnu normalnu razdiobu. Izračunajte $\mathbb{E}[e^{tX}], t \in \mathbb{R}$.

Rješenje.
Funkcija gustoće od X jest

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

pa slijedi

$$\mathbb{E}[e^{tX}] = \int_{-\infty}^\infty e^{tx} f(x) dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{tx - \frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-t)^2}{2} + \frac{t^2}{2}} dx$$

$$= e^{\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dx = \begin{bmatrix} y = x - t \\ dy = dx \end{bmatrix} = e^{\frac{t^2}{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy}_{=1} = e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Zadatak (6.35.) U prosjeku je 2% ljudi ljevoruko. Nađite vjerojatnost da je među 100 ljudi barem troje ljevaka.

Rješenje.
X = broj ljevorukih ljudi $\Rightarrow X \sim$B$(100, 0.02)$
Budući da je $n \geqslant 20$, $np = 2 < 10$, prema teoremu o aproksimaciji binomne slučajne varijable Poissonovom imamo

$$\mathbb{P}(X \geqslant 3) = 1 - \mathbb{P}(X < 3) \approx 1 - e^{-2}\left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!}\right) \approx 0.3233.$$

Zadatak (6.38.) Neka kompanija ima jeftine avionske letove iz Amsterdama za London. U avionu je 150 mjesta, a svaki putnik koji rezervira kartu se zaista vozi avionom s vjerojatnošću 0.9. Kompanija u svakom slučaju želi napuniti avion pa se uvijek proda 160 rezervacija. Izračunajte vjerojatnost da u avionu neće biti mjesta.

Rješenje.
X = broj ljudi koji se voze avionom $\Rightarrow X \sim$B$(160, 0.9)$
Trebamo odrediti kolika je vjerojatnost da će na let doći više od 150 putnika. Prema integralnom Moivre - Laplaceovom teoremu imamo:

$$\mathbb{P}(X > 150) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 150) = 1 - \Phi\left(\frac{150 - 160 \cdot 0.9}{\sqrt{160 \cdot 0.9 \cdot 0.1}}\right) = 1 - \Phi(1.58) = 0.0571.$$

Zadatak (6.39.) Koliko puta treba baciti 3 simetrične kocke da bi s vjerojatnošću od barem 0.9 barem 50 puta dobili barem 2 šestice u jednom bacanju?

Rješenje.
Vjerojatnost da u jednom bacanju triju simetričnih kocaka dobijemo barem 2 šestice jednaka je $\frac{1+3\cdot 5}{6^3} = \frac{2}{27}$ (naime, od ukupno $6^3 = 216$ mogućih ishoda "povoljno" je njih $1 + 3 \cdot 5 = 16$; to je ishod u kojem su pale sve tri šestice i ishodi u kojima je na dvije kocke pala šestica, a na trećoj jedan od brojeva od 1 do 5). Sada u našem pokusu imamo
X = broj bacanja u kojima smo dobili barem dvije šestice $\Rightarrow X \sim$B$(n, \frac{2}{27})$
(n je broj bacanja triju igraćih kocaka.)
Trebamo odrediti n za koji je $\mathbb{P}(X \geqslant 50) \geqslant 0.9$. Prema integralnom Moivre - Laplaceovom teoremu imamo

$$\mathbb{P}\left(\frac{X - \frac{2}{27}n}{\sqrt{n \cdot \frac{2}{27} \cdot \frac{25}{27}}} \geqslant \frac{50 - \frac{2}{27}n}{\sqrt{n \cdot \frac{2}{27} \cdot \frac{25}{27}}}\right) \geqslant 0.9$$

$$\Rightarrow 1 - \Phi\left(\frac{50 - \frac{2}{27}n}{\sqrt{n \cdot \frac{2}{27} \cdot \frac{25}{27}}}\right) \geqslant \Phi(1.29)$$

$$\Rightarrow \Phi(-1.29) \geqslant \Phi\left(\frac{50 - \frac{2}{27}n}{\sqrt{n \cdot \frac{2}{27} \cdot \frac{25}{27}}}\right)$$

$$\Rightarrow -1.29 \cdot \sqrt{\frac{50}{27^2}} \cdot \sqrt{n} \geqslant 50 - \frac{2}{27}n$$

$$\Rightarrow 0.07407n - 0.33784\sqrt{n} - 50 \geqslant 0$$
$$\Rightarrow \sqrt{n} \geqslant 28.36$$
$$\Rightarrow n \geqslant 804.35$$

Dakle, kocke treba baciti najmanje 805 puta.

Zadatak (6.41.) Nadaleko poznata vještica Bellatrix bavi se vrlo unosnim poslom: čarolijom pretvara vjeverice u neke druge životinje koje se dobro prodaju na tržištu. Budući da još uvijek nije usavršila čaroliju, Bellatrix pretvara vjevericu u pegaza, jednoroga ili konja redom s vjerojatnostima 0.2, 0.3 ili 0.5. Trenutna cijena pegaza na tržištu je 5 zlatnika, dok jednorog i konj vrijede po 2 zlatnika. Koliko vjeverica Bellatrix treba naručiti da bi s vjerojatnošću od barem 0.95 zaradila barem 1000 zlatnika?

Rješenje.
X = broj pegaza koje je Bellatrix stvorila $\Rightarrow X \sim \mathrm{B}(n, 0.2)$
(n je broj vjeverica koje je Bellatrix naručila.)
Ukoliko sa Y označimo ukupnu zaradu, imamo

$$Y = X \cdot 5 + (n - X) \cdot 2 = 3X + 2n.$$

Trebamo odrediti n za koji je $\mathbb{P}(Y \geqslant 1000) \geqslant 0.95)$. Prema integralnom Moivre - Laplaceovom teoremu imamo

$$\mathbb{P}(3X + 2n \geqslant 1000) \geqslant 0.95$$
$$\Rightarrow 1 - \Phi\left(\frac{\frac{1000-2n}{3} - n \cdot 0.2}{\sqrt{n \cdot 0.2 \cdot 0.8}}\right) \geqslant \Phi(1.65)$$
$$\Rightarrow \frac{\frac{1000-2n}{3} - n \cdot 0.2}{\sqrt{n \cdot 0.2 \cdot 0.8}} \leqslant -1.65$$
$$\Rightarrow -0.8667n + 0.66\sqrt{n} + 333.33 \leqslant 0$$
$$\Rightarrow \sqrt{n} \geqslant 19.9955$$
$$\Rightarrow n \geqslant 399.8$$

Dakle, Bellatrix treba naručiti barem 400 vjeverica.

Zadatak (6.44.) Neki trgovac je glavni distributer porculanskih vaza za neki grad. On svaku od vaza naruči iz tvornice po cijeni od 80 kn, a prodaje ih trgovinama specijaliziranim za porculansko posuđe po cijeni od 90 kn. Međutim, pri prijevozu od tvornice do njegovog skladišta se razbije 5% vaza. Sve vaze koje stignu do njegovog skladišta uvijek uspješno proda trgovinama. Koliko vaza trgovac treba naručiti iz tvornice da s vjerojatnošću od barem 0.975 zaradi barem 10 000 kn?

Rješenje.
X = broj razbijenih vaza $\Rightarrow X \sim \mathrm{B}(n, 0.05)$
(n je broj vaza koje je trgovac naručio.)
Ako sa A označimo ukupnu zaradu trgovca, imamo

$$Y = (n - X) \cdot 90 - 80n = -90X + 10n.$$

Sada tražimo n takav da $\mathbb{P}(Y > 10000) \geqslant 0.975$. Prema integralnom Moivre - Laplaceovom teoremu imamo:

$$\mathbb{P}(-90X + 10n \geqslant 10000) \geqslant 0.975$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(X \leqslant \frac{1}{9}(n-1000)\right) \geqslant 0.975$$
$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{\frac{1}{9}(n-1000) - \frac{1}{20}n}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{19}{20}}}\right) \geqslant \Phi(1.96)$$
$$\Rightarrow \frac{11}{180}n - \frac{1000}{9} \geqslant \frac{1.96\sqrt{19}}{20}\sqrt{n}$$
$$\Rightarrow 0.0611n - 0.42717\sqrt{n} - 111.111 \geqslant 0$$
$$\Rightarrow \sqrt{n} \geqslant 46.2827$$
$$\Rightarrow n \geqslant 2142$$

Zadatak (6.45.) Morsko dno u Zaljevu Bisera je bogato školjkama. Poznato je da se u prosjeku u svakoj četvrtoj školjci nalazi biser. Ronioc pri svakom zaronu izroni samo jednu školjku. Ako je ronioc izronio 150 školjaka, izračunajte vjerojatnost da je među školjkama barem dvostruko više školjaka s biserom nego onih bez bisera.

Rješenje.
X = broj izronjenih školjaka s biserom $\Rightarrow X \sim$B$(150, 0.25)$
Tražimo vjerojatnost da je broj školjaka s biserom jednak barem dvije trećine ukupnog broja izronjenih školjaka. Prema integralnom Moivre - Laplaceovom teoremu imamo:

$$\mathbb{P}\left(X \geqslant \frac{2}{3} \cdot 150\right) = 1 - \mathbb{P}(X < 100) = 1 - \Phi\left(\frac{100 - 150 \cdot 0.25}{\sqrt{150 \cdot 0.25 \cdot 0.75}}\right) = 1 - \Phi(11.785) = 0.$$

Zadatak (6.46.) U nekom gradu su se jednog kišnog dana na glavnom trgu prodavale dvije vrste kišobrana: jedna vrsta po 30 kn, a druga po 50 kn. Prodavač je na kraju dana zaključio da je svaki peti kupac kišobrana kupio skuplji kišobran. Ako je tog dana bilo 200 kupaca, izračunajte vjerojatnost da je prodavač zaradio barem 7000 kn.

Rješenje.
X = broj kupaca koji su kupili skuplji kišobran $\Rightarrow X \sim$B$(200, 0.2)$
Ako sa Y označimo zaradu trgovca, vrijedi

$$Y = X \cdot 50 + (200 - X) \cdot 30 = 6000 + 20X,$$

pa prema integralnom Moivre - Laplaceovom teoremu imamo:

$$\mathbb{P}(Y \geqslant 7000) = \mathbb{P}(6000 + 20X \geqslant 70) = \mathbb{P}(X \geqslant 50) = 1 - \mathbb{P}(X < 50) =$$
$$= 1 - \Phi\left(\frac{50 - 200 \cdot 0.2}{\sqrt{200 \cdot 0.2 \cdot 0.8}}\right) = 1 - \Phi(1.76) = 1 - 0.9608 = 0.0392.$$

Zadatak (6.47.) Rulet ima 18 crvenih polja, 18 crnih polja i jednu nulu. Pretpostavite da u svakoj igri igrate na crveno. Ako kuglica padne na crveno, onda dobijete 1 kn, a inače gubite 1 kn. Približno odredite vjerojatnost da ste nakon 50 igara na dobitku.

Rješenje.
X = broj dobivenih igara $\Rightarrow X \sim$B$(50, \frac{18}{37})$
Ako sa Y označimo ukupni dobitak, vrijedi

$$Y = X \cdot 1 + (50 - X) \cdot (-1) = 2X - 50,$$

pa prema integralnom Moivre - Laplaceovom teoremu imamo:

$$\mathbb{P}(Y > 0) = \mathbb{P}(2X - 50 > 0) = \mathbb{P}(X > 25) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 25) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{25 - 50 \cdot \frac{18}{37}}{\sqrt{50 \cdot \frac{18}{37} \cdot \frac{19}{37}}}\right) = 1 - \Phi(0.19) = 1 - 0.5753 = 0.4247.$$