Vjerojatnost i statistika

E. Kovač-Striko
N. Kapetanović
B. Ivanković

23. rujna 2005.

Sadržaj

1 Kombinatorika

Matematička disciplina koja uglavnom proučava konačne skupove i strukture. Prebrojavanje skupova danas je samo jedan od vidova kombinatorike. Riječ dolazi od latinske riječi combinare=slagati. U prebrojavanju služimo se enumerativnim metodama ako uopće možemo uočiti strukturu skupa. Navedimo neke od tipičnih problema:

1. Na koliko se različitih načina 6 ploha kocke može obojiti ako imamo četiri boje, a isti načini bojanja su oni koji se mogu rotacijama dovesti do poklapanja?

2. Može li se svaki od 5 telefona spojiti s točno tri preostala?

3. Na koliko različitih načina može četvoro ljudi sjesti za okrugli stol?

4. Koliko ukupno utakmica odigraju momčadi nogometne hrvatske lige ako svaki klub odigra po dvije utakmice sa svakim od preostalih klubova?

5. Na koliko načina može petoro ljudi podijeliti 24 kovanice od po jednu kunu?

6. U društvu od četvero ljudi svaka dvojica imaju točno jednog zajedničkog prijatelja. Dokažite da u tom društvu postoji osoba koja je prijatelj svim ostalim članovima društva.

7. Svaki je član nekog kolektiva u točno dvije delegacije, a svake dvije delegacije imaju točno jednog zajedničkog člana. Ukupno, taj kolektiv ima 5 delegacija. Koliko članova ima taj kolektiv?

8. Koliko je peteroznamenkastih brojeva kojima ja svaka znamenka tog broja veća od zbroja dviju znamenaka neposredno s njoj desne strane? *(Fibonaccijevi brojevi)*

   Rješenja i obrazloženja probajte pronaći sami.

Možda su to samo zgodne zagonetke i služe samo za razonodu. Povijesno gledano, kombinatorika je kao znanstvena disciplina nastajalo malo-pomalo, a svoje korijene vuče iz zabavne matematike, zagonetaka, igara još od 17. stoljeća. Kombinatorika se danas ozbiljno primjenjuje u biologiji, kemiji, elektronici, medicini, lingvistici, sociologiji ...

1.1 Teorem o uzastopnom prebrojavanju

Teorem 1 *Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_m$ konačni skupovi i neka je*

$$T \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m$$

skup uredjenih m-torki $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ definiranih na slijedeći način:

- *prva komponenta a_1 može se birati na k_1 različitih načina, izmedju k_1 različitih elemenata skupa A_1,*

- *za svaku već odabranu komponentu a_1, drugu komponentu a_2 možemo izabrati na k_2 različitih načina, ...*

- sve dok posljednju možemo birati na k_m različitih načina.

Tada skup T svih uredjenih n-torki ima

$$k_1 \cdot k_2 \cdots k_m$$

elemenata.

Dokaz: se provodi indukcijom, ali to nije u domeni kolegija.

Primjeri primjene navedenog teorema o uzastopnom prebrojavanju:

1. Ako registarska pločica zagrebačkog registarskog područja ima u izboru najviše 4-znamenkasti broj i dva slova abecede koja ne mogu biti palatali, koliko se različitih tablica može izdati?
   *Rješenje:*prva se znamenka može izabrati na deset načina, s tim da se nula ne piše. Za svaku tako izabranu znamenku, druga se opet može izabrati na 10 načina ... Abeceda ima 7 palatala, pa je po teoremu 1:
   $$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 27 \cdot 27$$

2. Ako na području Republike BiH registarske tablice imaju troznamenkasti broj, zatim slovo koje postoji i jednako je u azbuci i abecedi, a onda ponovo troznamenkasti broj, koliko se tablica može izdati na području susjedne republike?
   Rješenje: analogno prethodnom, ako su zajednička slova azbuke i abecede: A, B, E, I, J, K, M, O i T:
   $$10^3 \cdot 9 \cdot 10^3.$$

3. U razredu koji broji 20 učenika, treba izabrati Predsjednika, njegova zamjenika i blagajnika. Koliko je različitih mogućnosti za izbor tročlanog povjerenstva razreda?*Rješenje:*
   $$20 \cdot 19 \cdot 18.$$

4. Iz grada A u grad B vode četiri ceste, a iz B u C pet. Na koliko načina možemo iz grada A preko B stići u C?
   Rješenje:
   $$4 \cdot 5 = 20$$

5. Na nekom je šahovskom turniru odigrano 78 partija. Turnir je igran po principu da je svaki igrač odigrao sa svakim samo jedan meč. Koliko je bilo šahista na turniru?
   Rješenje:
   $$\frac{n \cdot (n-1)}{2} = 78 \quad n = 13$$

6. Koliko dijagonala ima konveksni 12-terokut? *Rješenje:* Iz svakog je vrha moguće povući $n-3$ dijagonala:

$$\frac{12 \cdot (12-3)}{2}$$

7. Koliko ima peteroznamenkastih brojeva čije su svake dvije susjedne znamenke različite?
Rješenje: Prva znamenka ne može biti 0. Kad se ona odabere, drugo je mjesto moguće popuniti opet na 9 načina, jer se ne smije staviti znamenka kao na prvom mjestu. Konačan broj takovih brojeva je:

$$9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$$

8. Koliko ima različitih telefonskih brojeva od 7 znamenaka?
Rješenje:

$$9 \cdot 10^6$$

   - ako su prve tri znamenke neparne?
   Rješenje:
   $$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$$
   - ako su prve dvije znamenke jednake?
   Rješenje:
   $$9 \cdot 1 \cdot 10^5$$
   - sve su znamenke različite?
   Rješenje:
   $$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4.$$
   - prve tri i posljednje tri su jednake?
   Rješenje:
   $$9 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1.$$
   - sve su različite, s tim da su prva, treća i peta neparne, a druga, četvrta i šesta parne?
   Rješenje:
   $$5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 10.$$

Zadaci za samostalno rješavanje:

1. Koliko elemenata skupa

$$\{1, 2, 3, \ldots 1000\}$$

je djeljivo sa četiri?

2. Ako godina ima 365 dana, koliko najviše u toj godini ima dana "petak trinaesti"?

3. Test ima 20 pitanja s odgovorima DA ili NE. Na koliko se različitih načina test može riješiti?

4. Knjižnica sadrži 40 različitih knjiga iz matematike, 30 iz fizike, 27 iz kemije i 20 kniga iz biologije. Na koliko načina može učenik uzeti iz knjižnice po jednu knjigu iz ta četiri predmeta?

5. Na farmi se nalazi 20 ovaca, 24 svinje i 10 goveda.

   (a) na koliko se načina može odabrati po jedna ovca, svinja i govedo?

   (b) isto pitanje kao u a, ali ako je već odabrana jedna takva trojka?

6. Koliko cijelih brojeva između 100 i 999 ima različite znamenke, a koliko je među njima neparnih?

7. Na nekom sportskom peteroboju nacija, svaka od zamalja učesnica ima ekipu iz nogometa, rukometa, košarke, plivanja, vaterpola, atletike, boksa i tenisa. Propozicije natjecanja nalažu da svaka zemlja u svakom od tih sportova mora održati meč sa svakom od preostlih zemalja. Koliko će se mečeva ukiupno održati na tom natjecanju?

8. Kroz svaku od tri točke A, B i C u ravnini, povučeno je 10 pravaca, među kojima nema paralelnih i nikoja 3 se ne sijeku u jednoj točki (osim u A, B, C). Nađite broj presjecišta određenih tim pravcima.

   (a) Nađite broj presjecišta ako kroz A prolazi 10, kroz B 20, a kroz C 30 pravaca.

9. Na nekom šahovskom turniru, svaki je igrač odigrao sa svakim od preostalih po jednu partiju. Ukupno je odigrano 78 partija. Koliko je šahista sudjelovalo na turniru?

10. Zadani su skupovi $A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{a, b, c\}$. Koliko ima

    (a) svih funkcija iz A u B?

    (b) surjekcija iz A u B?

Rješenje: 1. 250; 2. 3; 3. 2^{20}; 4. 648.000; 5. a)4800;b)3933; 6.648(324); 7. 80; 8. 13; 9. $3n^2 = 300$;a) $mn + mp + np = 1100$; 10. a)$3^4 = 81$, b) 36

1.2 Formula uključivanja i isključivanja

Rješenje posljednjeg zadatka iz prethodnog poglavlja u kojem se traži broj surjekcija nemoguće je izvesti bez primjene formule isključivanja i uključivanja.

a) Funkcija

$$f : A \to B$$

je takvo pridruživanje koje svakom elementu skupa A pridruži točno jedan element iz skupa B. Broj funkcija iz $A = \{1, 2, 3, 4\}$ u skup $B = \{a, b, c\}$ moguće je humanizirati u problem broja načina na koje se svakom od četiri mladića može sviđati točno jedna od tri djevojke. Očito svaki dečko ima 3 mogućnosti izbora, pa je to

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$$

način simpatiziranja (doduše jednostranog)

b) Surjektivnost funkcije je svojstvo da svaki element kodomene ima u domeni bar jedan element koji mu je pridružen.

To bi u navedenoj humanizaciji značilo da nema djevojke koju bar jedan mladić ne bi simpatizirao.

Zadatak se rješava upravo suprotno:

1. računa se broj funkcija

$$f : A \to B \setminus \{a\}$$

koje simboliziraju broj načina na koji mladići u simpatiziranju zaobilaze djevojku a:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$$

2. računa se broj funkcija

$$f : A \to B \setminus \{b\}$$

koje simboliziraju broj načina na koji mladići u simpatiziranju zaobilaze djevojku b:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$$

3. računa se broj funkcija

$$f : A \to B \setminus \{c\}$$

koje simboliziraju broj načina na koji mladići u simpatiziranju zaobilaze djevojku c:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$$

Pogrešno bi bilo zaključiti da je zbroj

$$16 + 16 + 16 = 3 \cdot 16 = 48$$

stvaran broj funkcija koje nisu surjekcije:

- postoji slučaj u kojem su svi zatreskani u djevojku a i taj slučaj se u gornjoj sumi brojao dvaput
- postoji slučaj u kojem su svi zatreskani u djevojku b i taj slučaj se u gornjoj sumi brojao dvaput
- postoji slučaj u kojem su svi zatreskani u djevojku c i taj slučaj se u gornjoj sumi brojao dvaput.

Slijedi da iz zbroja

$$16 + 16 + 16$$

moraju ta tri slučaja biti izuzeti. Ukupan broj funkcija koje nisu surjekcije je

$$48 - 3 = 45,$$

pa je broj onih koje jesu surjekcije 36, kao u rješenju.

Vennovi dijagrami su grafički prikazi skupova koji ističu relacije "biti podskup", "imati presjek", "biti disjunktan" i "biti element". Vennovi dijagrami ne služe u svrhu dokaza.

Zadaci

1. U nekom društvu umirovljenika primijetili su da nema člana koji ne bi bio ćelav ili ne bi nosio naočale. U trenucima dokolice ustanovili su da je 31 član ćelav, da ih 24 nosi naočale i da ih 12 ima naočale i istovremeno su ćelavi. Koliko članova ima društvo penzionera?(43)

2. U nekom razredu svaki učenik uči bar jedan od tri strana jezika. 18 ih uči engleski, 15 njemački, a 9 francuski. 10 ih uči engleski i njemački, 7 ih uči engleski i francuski, a 6 francuski i njemački. 5 učenika uči sva tri jezika.

   (a) Koliko učenika ima u tom razredu?

   (b) Koliko učenika uči sama njemački?

   (c) Koliko učenika uči engleski i francuski, ali ne i njemački?

3. U skupu od 100 studenata engleski jezik zna 28 studenata, njemački 30, francuski 42, engleski i njemački zna njih 8, engleski i francuski 10, njemački i francuski pet, dok sva tri jezika znaju samo tri studenta. Koliko studenata ne zna nijedan jezik? (20)

Propozicija 1 (Formula uključivanja - isključivanja) *prebrojava nedisjunktne unije:*

1. *Ako su A i B konačni skupovi, tada vrijedi:*

$$k(A \cup B) = k(A) + k(B) - k(A \cap B)$$

2. *Ako su A, B i C konačni skupovi, tada vrijedi:*

$$k(A \cup B \cup C) = k(A) + k(B) + k(C) - k(A \cap B) - k(A \cap C) - k(B \cap C) + k(A \cap B \cap C)$$

3. *Ako su $A_1, A_2, \ldots, A_m$ konačni skupovi:*

$$\begin{aligned} k(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) &= \sum_{i=1}^{m} k(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq m} k(A_i \cap A_j) + \\ &+ \sum 1 \leq i < j < k \leq m k(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots \\ &+ \cdots (-1)^{m+1} \cdot k(\bigcap_{i_1}^{m} A_i) \end{aligned}$$

Dokaz se provodi indukcijom, no u ovom kolegiju neće biti prezentiran.

Zadatak 1 *U jednom gradu, koji ima samo 40.000 stanovnika, organiziraju se u dobrotvorne svrhe razne aktivnosti. Gradonačelnik se na kraju godine* *pohvalio da su održana dva koncerta i lutrija, te da je svaki drugi građanin sudjelovao u dobrotvornim aktivnostima.*

Poznato je da je na koncertu ozbiljne glazbe bilo 2.000 posjetilaca, na rock-koncertu 8.000, te da je po jedan listić lutrije kupilo 12.000 stanovnika. Nadalje, potnato je da je 500 ljudi bilo na oba koncerta, da je 50 ljudi koji su bili na koncertu ozbiljne glazbe sudjelovalo u lutriji, te da je 3.000 posjetilaca rock-koncerta kupilo lutriju. Nitko nije kupio više od jednog listića lutrije.

Što mislite o gradonačelniku?

Rješenje: provjeriti tvrdnju gradonačelnika formulom FUI. Budući je presjek svih skupova po broju jednak 1550, brojniji je od nekih svojih natskupova, očito da gradonačelnik ne govori istinu.

Zadatak 2 *U nekom gradu na planeti Xprom ima 12000 stvorenja sa surlom, 15000 s repom i 20000 bez ijedne dlake. Osam tisuća njih sa surlom imalo je rep, 6000 sa repom bilo je dlakavo, 5000 dlakavih imalo je surlu, dok je njih 1000 bilo i dlakavo i repato i surlasto. Koliko je grad imao stanovnika?*

Rješenje:
Nakon raspoloživih podataka možemo tvrditi da ih je 30000. Pazite na dlakavost stanovnika!

1.3 Permutacije i varijacije

Kod permutacija i varijacija bitan je poredak elemenata, kao na primjer, u igri odbojke. Razlikujemo permutacije bez ponavljanja i permutacija s ponavljanjem. Varijacije se u suvremenoj literaturi uglavnom svrstavaju pod permutacije, jer se prebrojava na koliko načina može više od 6 igrača igrati odbojku.

Zadatak 3 *Na koliko načina može 8 ljudi čekati u redu za crni kruh?*

Rješenje na $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdots 1 = 8!$ načina.

1.3.1 Faktorijele

Faktorijela je unarna operacija:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n.$$

Ako se promatra kao funkcija, ima brži rast od svih elementarnih funkcija. Po definiciji je $0! = 1$.

Stirlingovu formulu koristimo za velike brojeve n kod približnog računanja, jer je vrijednost $n!$ uvijek prirodan broj:

$$n! = (\frac{n}{e})^n \cdot \sqrt{2\pi n}$$

Prilikom računanja koristimo se funkcijom dekadskog logaritma.

Zadatak 4 *Izračunajte prvih šest faktorijela. Do koje faktorijele računa vaša džepna računaljka?*

Rješenje:

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ 1! &= 1 \\ 2! &= 2 \\ 3! &= 6 \\ 4! &= 24 \\ 5! &= 120 \\ 6! &= 720 \end{aligned}$$

1.3.2 Permutacije bez ponavljanja

Neka je S n-člani skup čiji su elementi medjusobno različiti. Permutacija n-članog skupa je svaki niz od n medjusobno različitih elemenata iz S.

Zadatak 5 *Neka je $S = \{1, 2, 3\}$ ispišite sve permutacije skupa S.*

Zadatak 6 *Ispišite sve permutacije skupa $S = \{1, 2, 3, 4\}$.*

Po teoremu o uzastopnom prebrojavanju

$$P^n = n!.$$

Primjeri

1. Na koliko načina može 5 ljudi stati u red?
   Rješenje:
   $$5! = 120$$
   isto kao po teoremu o uzastopnom prebrojavanju.

2. Koliko permutacija ima riječ $PROMET$?
Rješenje:
$$6! = 720.$$

3. Na koliko načina može 5 muškaraca i 5 žena sjesti u red u kinu sa 10 sjedala, a da nijedne dvije žene ne sjede skupa?
Rješenje:
$$2(5!)^2 = 240$$
jer na prvo mjesto može sjesti bilo muškarac, bilo žena.

4. Na koliko načina može 11 vitezova sjesti oko okruglog stola?
Rješenje: Rj: Jednog fiksirati a ostali sjednu na 10! načina.

5. Na koliko načina može 5 studenata sjesti na jednu klupu tako da Ivica i Marica, kao dvoje od studenata sjede jedno do drugog?
Rješenje: Rj: Ivicu i Maricu uzeti kao jedan objekt. Sada 4 objekta sjeda na 4! načina. Još Ivica i Marica mogu zamijeniti mjesta, pa je to $2 \cdot 4! = 48$ načina.

6. Na koliko načina mogu 5 dječaka i dvije djevojčice stajati u redu, a da djevojčice ne budu jedna do druge?
Rješenje:
$$7! - 2 \cdot 6!$$
jer se od svih razmještaja izuzimaju oni u kojima djevojčice sjede skupa.

7. Na koliko načina može 5 muškaraca i 5 žena sjesti za okrugli stol, a da uvijek izmedju dva muškarca sjedi žena?
Rješenje: Rješenje: Zamisliti kartanje. Najprije svi sjednu kako je traženo. Drugačiji se raspored dobiva ako se svaki muškarac zamijeni sa susjednom ženom. Slijedeći se rasporedi dobivaju ako se muškarci permutiraju. Za svaku permutaciju muškaraca moguće je permutirati i žene. Zato je broj svih načina:
$$2 \cdot 6! \cdot 6!.$$

8. Na nekom sastanku, 5 ljudi A, B, C, D, i E trebaju održati referate. Na koliko načina oni mogu biti upisani u spisak govornika?
   (a) Koliko je rasporeda, ako B mora govoriti nakon A?
   (b) Koliko je rasporeda u kojima će A govoriti neposredno prije B?

   Rješenje: 120 načina

   (a) svakom rasporedu u kojem je B nakon A, moguće je naći raspored u kojem je A nakon B (zamjena poredka govornika). Ukupan broj je
$$\frac{1}{2} \cdot 5! = 60$$

(b) par AB treba smatrati jednim govornikom, pa je onda broj poredaka 4!

Zadaci za samostalno rješavanje:

1. Koliko je permutacija moguće napraviti od riječi
   a) DUBROVNIK   b) ZAGREB   c) SPLIT

2. Koliko ima peteroznamenkastih brojeva, koji imaju znamenke kao i broj

$$a)\quad 34125 \quad b)\quad 12034?$$

3. Neki skup ima n elemenata. ako se tom skupu dodaju dva elementa, onda broj njegovih permutacija postane 90 puta veći. Koliki je n?

4. (a) Na koliko se načina miže razmjestiti 8 topova (kula) na šahovsku ploču, tako da se nikoja dva međusobno ne napadaju?
   (b) Koliko je načina pod uvjetom da se topovi međusobno razlikuju?

5. (a) Na koliko se načina 24 učenika jednog razreda mogu svrstati u povorku?
   (b) Dva razreda od po 24 učenika trebaju održati susret u šahu. Na koliko načina oni mogu formirati parove protibnika?
   (c) Na koliko načina parovi protivnika mogu formirati povorku?

6. Na koliko načina 10 osoba može sjesti oko okruglog stola tako da Romeo i Julija uvijek sjede skupa?

7. Na koliko načina mogu za okrugli stol sjesti 6 muškaraca i 6 žena, tako da nikoje dvije osobe istog spola ne sjede jedna do druge?

8. Koliko ima peteroznamenkastih parnih brojeva koji imaju znamenke kao i broj 56079

Rješenja: 1. a)362880, b)720, c)120; 2.a)120 b)96; 3. 8; 4. a)8! b)$(8!)^2$; 5. a)24!, b)24!, c)$(24)^2$; 6. $2!8! = 80640$

1.3.3 Permutacije s ponavljanjem

Multiskup S je skup koji se sastoji od n elemenata s tim da je među njima n_1 jednakih predmeta prve vrste, n_2 predmeta druge, $\ldots$,n_k predmeta k-te vrste,

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n.$$

Tada je broj permutacija multiskupa jednak broju uređenih n-torki s elementima iz multiskupa:

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}.$$

Primjer 1 *Neka je $S = \{1, 1, 1, 2, 3, 3\}$. Koliko ima permutacija skupa S?*

Rješenje:
Kad bi se ispisivale sve uredjene šestorke:

$$\begin{array}{r} (1,1,1,2,3,3) \\ (1,1,1,3,2,3) \\ (1,1,1,3,3,2) \\ \vdots \\ (3,3,2,1,1,1) \end{array}$$

dobilo bi se

$$P_6^{3,1,2} = \frac{6!}{3! \cdot 1! \cdot 2!} = 60$$

permutacija s ponavljanjem. Prilikom ispisivanja permutacija pogodno je pridržavati se leksikografskog reda, sličnog poretku riječi u riječniku.

Zadatak 7 *Koliko anagrama ima riječ $MAMA$?*

Rješenje:
Nakon ispisivanja dobivamo ih

$$P_4^{2,2} = \frac{4!}{2!2!} = 6.$$

Leksikografski, to je

$$\begin{array}{c} AAMM \\ AMAM \end{array}$$

$$AMMA$$
$$MAAM$$
$$MAMA$$
$$MMAA.$$

Zadaci

1. Kolika anagrama ima riječ $MATEMATIKA$?
   Rješenje.
   $$\frac{10!}{2!2!3!} = 151200$$

2. Koliko se peteroznamenkastih brojeva može zapisati tako da se znamenka 3 upotrijebi tri, a znamenka 7 dva puta?
   Rješenje:
   $$\frac{5!}{3!2!} = 10$$

3. U koliko permutacija slova riječi JUPITER samoglasnici dolaze po abecednom redu?
   Rješenje. Budući samoglasnici moraju imati točan redoslijed, svi se samoglasnici mogu poistovjetiti, pa se permutira multiskup
   $$\{J, s, P, s, T, s, R\}$$
   na
   $$P_7^3 = \frac{7!}{3!} = 840$$
   načina.

4. Odjeljak vagona (kupe) ima dvije klupe po 5 mjesta. Od 10 putnika, njih 4 žele sjediti s licem okrenutim u smjeru vožnje vlaka, a troje u suprotnom smjeru, dok je ostaloj trojici svejedno kako sjede. Na koliko se načina putnici mogu razmjestiti u kupeu?
   Rješenje. Putnike na svakoj klupi moguće je razmjestiti na 5! načina. Izabrati putnika koji će sjediti u smjeru vožnje od onih kojima je svejedno moguće je na tri načina. Ukupno:
   $$3 \cdot (5!)^2$$
   načina

5. (a) Na koliko se načina 24 čovjeka mogu podijeliti na 3 brigade sa po osam ljudi svaka?
   Rješenje. Za svaki poredak 24 čovjeka u red na 24! načina, moguće je podijeliti prvoj osmorici majice prve, drugoj osmorici druge i ostalima treće brigade. Sada nije bitan poredak unutar brigada, pa je broj načina $8! \cdot 8! \cdot 8!$ puta manji.

Isto tako nije bitno kako su brigade poredane, pa je to još 3! puta manji broj poredaka koji daju drugačiju podjelu po brigadama. Ukupno je

$$\frac{24!}{(8!)^3 \cdot 3!}$$

načina.

(b) Na koliko je načina od 24 čovjeka moguće napraviti 8 grupa od po 3 čovjeka?
Rješenje:

$$\frac{24!}{(3!)^8 \cdot 8!}$$

načina.

6. Na koliko načina može kralj s donjeg lijevog ugla šahovske ploče doći u njen gornji desni ugao, ako se mora pomicati tako da nakon svakog pokreta bude bliži cilju?
Rješenje: svaki je put određen s nizom od k kosih, v vertikalnih i h horizontalnih pomaka:

$$\sum_{k=0}^{7} \frac{(14-k)!}{k![(7-k)!]^2} = 48639$$

7. Vrtlar sadi voćke na 100 označenih mjesta. Na koliko načina on može posaditi 25 jabuka, 25 krušaka i 50 šljiva?
Rješenje:

$$\frac{100!}{(25!)^2 \cdot 50!}$$

Računanje se izvodi po Stirlingovoj formuli ili se koristi algebra. Rješenje je prirodan broj. Uglavnom dobiva se $1.27 \cdot 10^{43}$ permutacija s ponavljanjem.

1.3.4 Varijacije bez ponavljanja

Varijacija r-tog razreda od n elemenata je svaka uredjena r-torka medjusobno različitih elemenata iz skupa S, za koji je $k(S) = n$. Broj

$$V_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} = n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1)$$

Džepna računaljka ima program nPr koji računa varijacije bez ponavljanja.

Primjer 2 *Ispišite sve permutacije reda tri za skup $S = \{1, 2, 3, 4\}$*

Rješenje:

$$\begin{array}{r} 123 \\ 124 \\ \vdots \\ 142 \\ 143, \end{array}$$

pa ih je zaista

$$\frac{4!}{1!} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$$

Zadatak 8 *Na koliko načina 6 osoba može posjesti četiri mjesta u jednom redu?*

Rješenje:
Na $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ različitih načina.

Zadatak 9 *Koliko se četveroznamenkastih brojeva s različitim znamenkama može napisati znamenkama* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Rješenje:

$$V_6^4 = \frac{8!}{(8-4)!} = 1680$$

Zadaci

1. Koliko se šifri može sastaviti od 7 različitih slova abecede?
   Rješenje.
   $$30 \cdot 29 \cdot 28 \ldots \cdot 24 = \frac{30!}{23!} = 10,260.432$$
   načina.

2. Na atletskom natjecanju sudjelovalo je 14 dugoprugaša. Medalje (zlatnu, srebrnu i brončanu) osvajaju samo prva tri plasirana natjecatelja. Na koliko se načina mogu podijeliti medalje?
   Rješenje. Zlatnu može dobiti teoretski bilo koji od njih 14. Nakon toga, srebrnu dobiva netko od 13 i brončanu nakon prve dvije netko od 12 preostalih:
   $$14 \cdot 13 \cdot 12 = 2184$$

3. Ishod nogometnog prvenstva je tablica s poredanih 12 klubova.

(a) Koliko ima različitih ishoda?
Rješenje.

$$12! = 479,001.600$$

(b) Koliko je različitih oklada ako se kladi na tri prvoplasirana i na dva koja će ligu napustiti?
Rješenje.

$$12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \frac{9 \cdot 8}{2} = 47520$$

1.3.5 Varijacije s ponavljanjem

Varijacija s ponavljanjem r-tog razreda od n elemenata je svaka uredjena r-torka elemenata iz skupa S, $k(S) = n$.

Primjer 3 *Koliko se četveroznamenkastih brojeva može napisati od znamenaka* $\{1, 2, 4, 6, 7, 8\}$*?*

Rješenje je

$$\overline{V}_6^4 = 1296$$

Primjer 4 *Lokot na šifru ima 4 koluta s po 10 znamenaka. Koliko je mogućih šifri?*

Broj mogućnosti je

$$\overline{V}_{10}^4 = 10^4.$$

Zadatak 10 *Na koliko se načina može popuniti listić sportske prognoze, ako ima trinaest parova, a za svaki par se može predvidjeti jedan od tri tipa: 1,2 ili X?*

Rješenje: na 3^{13} načina, jer svaki par ima tri različita izbora.

Zadatak 11 *Koliko bi se ljudi teoretski moglo razlikovati po zubima koji im nedostaju, ako odrasli čovjek ima 32 zuba?*

Rješenje: $2^{32} = 4,294,967.296$ načina.

Zadaci

1. Bacaju se dvije kocke. Koliki je broj ishoda?
Rješenje: Svaka kocka može imati 6 ishoda neovisno o drugoj kocki:

$$6^2 = 36$$

2. U sobi je na lusteru 6 žaruljica. Na koliko načina može luster svijetliti?
   Rješenje. Svaka žaruljica ima dvije mogućnosti: svijetli ili ne. Broj različitih osvjetljena:
   $$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 64$$

3. (a) U gradu je n semafora. Svaki semafor može svijetliti crveno, žuto ili zeleno. Na koliko načina mogu svi semafori svijetliti u određenom trenutku?
   Rješenje.
   $$3^n$$
   načina.

   (b) Na koliko načina može svijetliti n semafora, ako k od njih svijetli za pješake: crveno ili zeleno?
   Rješenje.
   $$2^k \cdot 3^{n-k}$$
   načina.

4. Koliko skup od 4 elementa ima različitih podskupova?
   Rješenje. Za svaki element skupa moguće je odabrati da li je u podskupu ili ne:
   $$2^4$$

5. Koliko skup od n elemenata ima različitih podskupova? ($2^n = 2^{|S|}$)

6. Netko je u Zagreb s milijun stanovnika donio vrlo zanimljivu vijest. Nakon 10 minuta, on je tu vijest saopćio dvojici; svaki od te dvojice je vijest nakon 10 minuta saopćio novoj dvojici sugrađana, sve dok nisu svi saznali. Nakon koliko bremena će vijest znati svi Zagrepčani?
   Rješenje. Nakon $10k$ minuta vijest će znati
   $$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1$$
   ljudi. Nejednadžba
   $$2^{k+1} - 1 > 10^6$$
   daje
   $$k > 18$$
   Nakon
   $$10 \cdot 19 = 190min = 3h10min$$
   svi će znati.

1.4 Kombinacije

1.4.1 Kombinacije bez ponavljanja

Kombinacija r-tog razreda od n elemenata je svaki podskup od r elemenata skupa S, $k(S) = n$. Računanje se izvodi po formuli za binomne koeficijente

$$K_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}.$$

Na kalkulatoru postoji tipka nCr koja računa binomne koeficijente.

Zadatak 12 *Košarkaški trener prijavi momčad od 11 igrača. Koliko različitih petorki može poslati na parket?*

Rješenje:
Odabir se vrši tako, da se igrači poredaju u vrstu. To se može učiniti na 11! načina. U svakom odabiru prvih pet se pošalje na parket. Budući u igri njihov poredak nije bitan, to je broj petorki 5! puta manji od 11!. Isto tako, ostalih 6 se može na klupi posjesti bez obzira na poredak. Tako je broj načina još 6! puta manji od 11!. Konačno, broj petorki je

$$\frac{11!}{5! \cdot 6!}$$

ili 462 načina.

Zadatak 13 *Na tulumu su odlučili igrati mini-loto. Uzeto je* 10 *biljarskih kugli i izvlači se pet. Koliko ima kombinacija?*

Rješenje:
Broj kombinacija je

$$\frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252.$$

Da li bi bilo više kombinacija da se izvlače tri kuglice?

Zadatak 14 *Iz špila od 52 igraće karte na slučajan način izvlačimo 8 karata. Na koliko načina možemo isvući:*

1. *točno 3 asa*

2. *barem 3 asa*

Rješenje:

1. $\binom{4}{3} \cdot \binom{48}{5}$.

2. $\binom{4}{3} \cdot \binom{48}{5} + \binom{4}{4} \cdot \binom{48}{5}$.

Posebni binomni koeficijenti:

Zadatak 15 *Kolike su vrijednosti*

$$\binom{n}{0}; \quad \binom{n}{n}.$$

Zadatak 16 *Koliko kombinacija ima loto 7 od 39, a koliko loto 6 od 45? Da li je lakše dobiti na lotu 10 od 40?*

Rješenja: $15,380.937$; $8,145.060$; $847,660.528$.

Binomna formula daje koeficijente u potenciranju binoma:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Zadatak 17 *U izrazu*

$$(1+x)^{30}$$

odredite koeficijent uz x^{20}.

Rješenje:
$\binom{30}{20} = 30,045.015.$

Zadaci:

1. Izračunajte:
   a) $\binom{7}{2}$; b) $\binom{7}{5}$; c) $\binom{101}{99}$; d) $\binom{1001}{1000}$

   Rješenja: a) 21;b)21;c)5050;c)500500

2. Dokažite da je
$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$$

3. Od 20 kandidata za stolnotenisku momčad, selektor mora izabrati tročlanu reprezentaciju. Na koliko načina može izvršiti izbor?
Rješenje.
$$\binom{20}{3} = 1140$$

4. Na koliko se načina mogu 3 jednake knjige razdijeliti među 12 učenika, tako da svaki učenik dobije najviše jednu knjigu?
Rješenje. Od 12 učenika izaberu se trojica koji dobivaju knjigu:
$$\binom{12}{3} = 1320$$
načina

5. Na maturalnoj večeri bilo je 28 učenika jednog razreda. Od toga 16 mladića i 12 djevojaka.
   (a) Koliko parova za ples se može formirati od po jednog mladića i jedne djevojke?
   Rješenje. 192
   (b) Na koliko načina mogu na podiju plesati tri para?
   Rješenje. Tri mladića i tri djevojke moguće je odabrati na
   $$\binom{16}{3} \quad i \quad \binom{12}{3}$$
   načina, s tim da je kod plesa bitan poredak mladića:
   $$\binom{16}{3} \cdot \binom{12}{3} \cdot 3! = 739200$$

6. Od 100 mobitela, 5 ih je s greškom. Na koliko se načina može odabrati 10 mobitela, tako da među njima bude
   (a) svih 10 ispravnih?
   Rješenje:
   $$\binom{95}{10}$$
   (b) 1 neispravan?
   Rješenje:
   $$\binom{95}{9} \cdot \binom{5}{1}$$

(c) 4 s greškom?
Rješenje:

$$\binom{95}{6} \cdot \binom{5}{4} =$$

(d) svih 5 s greškom?
Rješenje:

$$\binom{95}{5} =$$

1.4.2 Kombinacije s ponavljanjem

Kombinacije s ponavljanjem od n elemenata r-tog razreda je svaki podskup od r elemenata pri čemu je dozvoljeno ponavljanje svakog elementa proizvoljno mnogo puta.

Primjer 5 *Neka je skup* $S = \{1, 2, 3\}$ *Permutacije drugog razreda danog skupa su slijedeći multiskupovi:*

$$\begin{array}{ccc} \{11\} & \{22\} & \{33\} \\ & \{12\} & \{23\} \\ & & \{13\} \end{array}$$

Računanje je po formuli:

$$\overline{K}_n^r = \binom{n+r-1}{r}$$

što daje zaista $\binom{4}{2} = 6$ *permutacija. Analogno bi bilo postaviti pitanje na koliko načina troje ljudi može podijeliti dvije kune:*

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{array}$$

U ovom slučaju multiskupovi imaju po dva elementa koji simboliziraju kune, a elementi multiskupova se uzimaju iz skupa ljudi

$$\{1, 2, 3\}$$

kao da se na svaku od kuna nalijepi ceduljica čija je u zadanoj podjeli.

Zadatak 18 *Na koliko se načina može 5 bombona podijeliti na četvero djece. Pritom svako pojedino dijete može ostati i bez bombona,ali može dobiti i više bombona.*

Rješenje. Rješenje
Prvo dijete dobije nekoliko bombona u vrećici, drugo i treće dijete takodjer, dok četvrto dobiva bombone bez vrećice. Bombone i vrećice moguće je posložiti u niz:

$$O \quad O \quad V \quad O \quad V \quad O \quad V \quad O$$

tako da u svaku vrećicu idu bomboni ispred nje. Posljednje dijete dobiva bombone bez vrećice. Različite rasporede dobivamo razmješajem vrećica i bombona, ukupno

$$\binom{5+4-1}{4-1} = \binom{5+4-1}{5} = 56$$

načina.

Napomena. U prethodnom zadatku radi se o kombinacijama 5-tog razreda (podjela bombona) skupa od četiri elementa (djeca koja su dobila bombon).

Svaku podjelu bombona moguće je promatrati kao multiskup od 5 elemenata uzetih iz skupa djece

$$D = \{1, 2, 3, 4\}$$

kod kojih ne moraju biti uzeta sva četiri elementa iz D i u kojem se neki elementi mogu ponavljati. Jedan od skupova je:

$$P = \{1, 1, 1, 2, 3\}$$

koji simbolizira podjelu

- prvi bombon je dobilo prvo dijete
- drugi bombon je dobilo prvo dijete
- treći bombon je dobilo prvo dijete
- četvrti bombon je dobilo drugo dijete
- peti bombon je dobilo treće dijete

Zadatak 19 *Na koliko načina petero ljudi može podijeliti 24 kune?*

Rješenje. Rješenje
Analogno se dijele kune, tako da posljednju dobiva ostatak:

$$\binom{24+5-1}{5-1} = 20475$$

Zadaci

1. Dobavljač naručuje pet istovrsnih proizvoda koji mogu biti ispravni ili neispravni. Na koliko načina je moguć odabir?

   Rješenje. Rješenje je u slaganju pet proizvoda i elementa koji dijeli ispravne i neispravne:

   $$\binom{5+2-1}{5} = 6$$

2. Dobavljač može nabaviti proizvode prve, druge i treće klase. Na koliko načina može, obzirom na kvalitetu, naručiti tri proizvoda?
   Rješenje. Rješenje se postiže analogno slaganjem:

   $$\binom{3+3-1}{3} = 10.$$

3. U koliko različitih ekipa može ući četiri učenika za tri igre, koje igraju jednu za drugom, ako redoslijed sudjelovanja u igrama ne znači novu ekipu, ako

   (a) svaki učenik jedamput sudjeluje u igrama

   (b) svaki učenik sudjeluje više puta u igrama?

   Rješenje. Rješenje

   (a)
   $$\binom{4}{3} = 4.$$

   (b)
   $$\binom{4+3-1}{3} = 20.$$

4. U nekom restoranu imaju dvije vrste jela na jelovniku.

   (a) Na koliko načina pet osoba može naručiti jedno od dvije vrste jela?

Rješenje. $2^5 = 32$

.

(b) Na koliko se načina može ući i naručiti 5 jela za van ako je moguće birati između dva moguća?
Rješenje. ($\begin{pmatrix} 2+5-1 \\ 5 \end{pmatrix} = 6$).

5. Na koliko načina petero djece može među sobom razdijeliti 12 jabuka, 10 krušaka i 8 naranči, tako da svako dijete dobije bar po jednu jabuku, krušku i naranču?
Rješenje:

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Zadaci za vježbanje:

1. Neka su zadane znamenke 2,3,5 i 8. Koliko se od njih može napisati:

   (a) četveroznamenkastih brojeva

   (b) četveroznamenkastih brojeva kojima su sve znamenke različite

   (c) šesteroznamenkastih brojeva

   (d) dvoznamenkastih brojeva s različitim znamenkama

   Rješenje. Rješenja:

   (a) $\overline{V}_4^4 = 4^4$

   (b) $P_4 = 4!$

   (c) $\overline{V}_4^6 = 4^6$

   (d) $V_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!}$

2. Koliko ima različitih karata za putovanje prugom na kojoj je 10 stanica?
Rješenje. Rješenje: svaka je karta odredjena s dvije stanice:

$$V_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$$

različitih karata.

Napomena: ako gledamo karte po cijeni i ako cijena ovisi samo o početnoj i ciljnoj stanici, tada je to

$$K_{10}^2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} = 45$$

karata, duplo manje od slučaja u zadatku.

3. Na koliko se načina izmedju 10 muškaraca i 10 žena mogu izabrati dva muškarca i tri žene?
Rješenje.
$$K_{10}^2 \cdot K_{10}^3 = \left(\begin{array}{c} 10 \\ 2 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} 10 \\ 3 \end{array} \right) = 5400$$
načina izbora.

4. Na koliko se načina može razdijeliti 12 karata medju 3 osobe, tako da:
   (a) prva dobije 5, druga 4, a treća 3 karte?
   Rješenje.
   $$K_{12}^5 \cdot K_7^4 \cdot K_3^3 = \left(\begin{array}{c} 12 \\ 5 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} 7 \\ 4 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} 3 \\ 3 \end{array} \right) = 27720$$
   (b) nije odredjen broj karata koji će dobiti svaka pojedina osoba?
   Rješenje.
   $$\overline{K}_{12}^3 = \left(\begin{array}{c} 12+3-1 \\ 2 \end{array} \right) = 91$$

5. Koliko ima različitih dijeljenja kod "Bele u četvero"?
Rješenje.
$$\left(\begin{array}{c} 32 \\ 8 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} 24 \\ 8 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} 16 \\ 8 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} 8 \\ 8 \end{array} \right) \approx 10^{16}.$$

6. Izmedju 100 proizvoda ima 15 oštećenih. Na koliko načina možemo izabrati 10 proizvoda tako da ih barem osam bude neoštećeno?
Rješenje.
$$\left(\begin{array}{c} 85 \\ 8 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} 15 \\ 2 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} 85 \\ 9 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} 15 \\ 1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} 85 \\ 10 \end{array} \right).$$

1.5 Problemski zadaci

1. U skupu od 50 proizvoda nalazi se 40 ispravnih, a ostali su neispravni. Na koliko se načina može izabrati uzorak od 5 proizvoda, ali tako da u njemu budu 3 ispravna i 2 neispravna?

2. Od 7 žena i četiri muškarca treba izabrati delegaciju. Na koliko se načina može izabrati delegacija ako se ona sastoji od

   (a) petero ljudi i to tri žene i dva muškarca,

   (b) bilo kojeg broja ljudi ali da je jednak broj žena i muškaraca u delegaciji,

   (c) petero ljudi od kojih su bar dvije žene,

   (d) petero ljudi s tim da jedno od njih bude već unaprijed odredjena žena,

   (e) šestero ljudi, po troje od oba spola, ali u jednoj delegaciji ne mogu biti zajedno jedan muškarac i jedna žena za koje se zna da se ne podnose?

3. Student mora u roku od 8 dana položiti četiri ispita.

   (a) Na koliko to načina može učiniti?

   (b) Na koliko načina ih može položiti ako u jednom danu može položiti najviše jedan ispit?

   (c) Koliko je načina, ako posljednji odluči položiti zadnji dan?

   (d) Isto kao u c), ali da u danu ne položi više od ispita?

4. Šest muškaraca i pet žena moraju stati u red tako da se u redu izmjenjuju. Na koliko je načina moguće konstruirati takav red?

5. Na zasjedanju nekog studentskog udruženja prisustvuju 52 studenta, po 13 studenata sa svakog od četiri fakulteta. Predsjedništvo udruženja ima četiri člana, tako da u njemu budu predstavnici barem tri fakulteta. Koliko ima različitih predstavništva?

Rješenja problemskih zadataka:

1.
$$\binom{40}{3} \cdot \binom{10}{2} = 444600.$$

2. (a)
$$\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} = 210.$$

(b)
$$\binom{7}{1} \cdot \binom{4}{1} + \binom{7}{2} \cdot \binom{4}{2} + \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{3} + \binom{7}{4} \cdot \binom{4}{4} = 329.$$

(c)
$$\binom{11}{6} - \binom{7}{1} \cdot \binom{4}{4} = 455.$$

(d)
$$\binom{10}{4} = 210.$$

(e)
$$\binom{11}{5} - \binom{6}{2} \cdot \binom{3}{2} = 417.$$

3. (a)
$$8^4 = 4096$$

(b)
$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680.$$

(c)
$$8^3 \cdot 4 = 2048$$

(d)
$$4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 840.$$

4.
$$6! \cdot 5! = 86400.$$

5.
$$\binom{13}{1}^4 + 4 \cdot 3 \cdot \binom{13}{1}^2 \cdot \binom{13}{2} = 186745,$$

jer na četiri načina možete izabrati onoga koji nema predstavnika, dok na tri načina može biti izabran fakultet s dva predstavnika.

2 Vjerojatnost

2.1 Klasična definicija a priori

Slučajan pokus s konačno mnogo jednako mogućih elementarnih ishoda je takav pokus kod kojeg

- svaki pojedini ishod nije moguće jednoznačno odrediti
- postoji mogućnost ponavljanja proizvoljno konačno mnogo puta.

Elementarni događaj je svaki od konačno mnogo ishoda slučajnog pokusa:

$$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$$

Prostor elementarnih događaja je neprazan skup

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\},$$

čiji su elementi

$$\omega_i$$

elementarni događaji

Događaj je podskup skupa koji se naziva prostorom elementarnih dogadjaja:

$$A \subset \Omega$$

Vjerojatnost dogadjaja $A \subset \Omega$ računa se po formuli:

$$p(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)},$$

gdje je

$$k(A) = |A|$$

oznaka za broj elemenata skupa A.

Primjeri

1. Kolika je vjerojatnost da će kod bacanja simetričnog novčića pasti "pismo"?

2. Kolika je vjerojatnost da će kod bacanja kocke pasti broj 6?

3. Kolika je vjerojatnost da će kod izvlačenja jedne karte iz špila od 32 biti izvučena karta boje "karo"?

4. Ako na sistemskom listiću Lota 7/39 igramo 23 broja, kolika je vjerojatnost dobitka "sedmice"?

Nemogućim dogadjajem naziva se

- prazan skup

$$\emptyset \subset \Omega$$

- bilo koji skup C:

$$C \cap \Omega = \emptyset$$

Sigurnim dogadjajem naziva se skup Ω.

Očito vrijedi:

- $p(A) \geq 0$
- $p(\Omega) = 1$
- $p(\Omega \setminus A) = p(A^c) = 1 - p(A)$
- $A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

U teoriji skupova se kolekcija $\mathcal{F}$ podskupova nekog skupa Ω, koja sadrži prazan skup, skup Ω, komplement svakog svojeg člana u odnosu na matični skup $A^c = \Omega \setminus A$, a i zatvorena je na prebrojivu uniju, zove σ **-** algebra podskupova od Ω.

Vjerojatnost je tada funkcijsko pridruživanje

$$p : \mathcal{F} \to [0, 1]$$

koje, ako vrijede prethodna svojstva, zajedno s Ω i $\mathcal{F}$ čini

Vjerojatnosni prostor:

$$(p, \mathcal{F}, \Omega).$$

Neki primjeri vjerojatnosnih prostora:

1. Neka se slučajni pokus sastoji od bacanja triju različitih novčića. Odredite prostor elementarnih dogadjaja, vjerofatnost svakog od njih i vjerofatnost da na bar jednom novčiću padne "glava".

2. Igra na sreću sastoji se od bacanja dviju kocaka. Odredite vjerojatnost da zbroj na kockama bude veći od 9?

3. U Beli se dijeli osam karata. Odredite vjerojatnost dobivanja:

   (a) jednog asa

   (b) bar jednog asa

4. Na zidu dimenzija 8×5 metara nalaze se četiri prozora svaki dimenzija 1.8×1.2 metra. Kolika je vjerojatnost da dječak koji nasumice puca loptu u zid pogodi bilo koji prozor?

Zadaci

1. Student je izašao na ispit znajući 20 od 25 pitanja.Na ispitu se izvlače tri pitanja. Koja je vjerojatnost da student zna odgovor na:

   (a) na sva tri pitanja

   (b) na barem jedno pitanje

   Rješenje:

   (a) povoljno je da sva tri pitanja budu izabrana od 20 poznatih, što naprama ukupnog broja izbora pitanja:

   $$p(A) = \frac{\binom{20}{3}}{\binom{25}{3}} = 0.495$$

   (b) suprotno bi bilo da nezna baš ništa, pa su šanse za okladu da bar nešto zna:

   $$100\% - \frac{\binom{5}{3}}{\binom{25}{3}} = 0.9957$$

2. Koja je vjerojatnost da dvije slučajno izabrane osobe imaju rodjendane istog dana?

   Rješenje:

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(i,j), \quad 1 \leq i,j \leq 365\} \\ A &= \{(i,i), \quad 1 \leq i \leq 365\} \end{aligned}$$

$$p = \frac{365 \cdot 1}{365 \cdot 365}$$

3. Koja je vjerojatnost da izmedju n osoba budu barem dvije koje imaju rodjendan istog dana?

   Rješenje:

$$p_n = 1 - p(A^c) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - n + 1)}{365^n}$$

   (a) izračunati za broj osoba $n = 5$.

   Rješenje:

$$p_5 = 1 - \frac{6.3 \cdot 10^1 2}{6.5 \cdot 10^1 2} = 2.7\%$$

4. Iz špila od 52 karte na slučajan način, jednu za drugom, izvlačimo dvije karte i to

   (a) prvu izvučenu kartu vraćamo u špil

   (b) prvu izvučenu kartu ne vraćamo u špil

   Koja je vjerojatnost da izvučemo oba asa?

   Rješenje:

$$\begin{aligned} p(A) &= \frac{4 \cdot 4}{32 \cdot 32} \\ p(B) &= \frac{4 \cdot 3}{32 \cdot 31} \end{aligned}$$

5. Koliko je vjerojatno da će dobiti sedmicu na lotu 7/39 onaj tko na sistemskom listiću uplati najveći broj kombinacija koji se nudi? Koliko će novaca izdvojiti?

   Rješenje: diskutirati sa studentima i postaviti analogon za 6/45.

6. Koja je vjerojatnost da dijete dobije šesticu ako baca triput uzastopce?

   Rješenje se dobiva preko suprotnog dogadjaja, a to je da u tri puta nijednom nije opala šestica:

$$p = 1 - (\frac{5}{6})^3 = 0.42.$$

7. Simetričan novčić bacamo 5 puta. Koja je vjerojatnost da je pismo palo triput?
Rješenje:
$$p = \binom{5}{3} \cdot (\frac{1}{2})^5 = 0.3125$$

8. Igramo poker s 52 karte, znači da biramo 5 karata. Koliko je vjerojatno da u prvih 5 karata dobijemo
   (a) poker (četiri iste)
   (b) ful (par i tri iste)

Rješenje:

(a)
$$p(P) = \frac{13 \cdot \binom{4}{4} \cdot \binom{48}{1}}{\binom{52}{5}}$$

(b)
$$p(B) = \frac{13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}$$

9. U kutiji se nalazi 4 puta više ispravnih nego neispravnih proizvoda. Na slučajan način biraju se tri proizvoda. Vjerojatnost da medju njima bude bar jedan neispravan proizvod iznosi $\frac{29}{57}$. Koliko je proizvoda u kutiji?

Rješenje: se dobiva iz jednadžbe u kojoj je nepoznanica n broj neispravnih proizvoda. Tada je $4n$ broj ispravnih, a zadanu vjerojatnost dobivamo preko negacije suprotnog dogadjaja, da su sva tri izvučena proizvoda ispravna:

$$\begin{aligned}
1 - \frac{\binom{4n}{3}}{\binom{5n}{3}} &= \frac{29}{57} \\
\frac{4n(4n-1)(4n-2)}{5n(5n-1)(5n-2)} &= \frac{28}{57} \\
37n^2 - 159n + 44 &= 0 \\
n_{1,2} &= 4; \frac{11}{37}
\end{aligned}$$

dobiva se da neispravnih proizvoda ima 4, ispravnih 16, dok sveukupno u kutiji ima 20 proizvoda.

10. U kutiji je 12 kuglica: plave, žute i tri crvene. Na slučajan način biramo tri kuglice. Ako vjerojatnost da izaberemo po jednu plavu, žutu i crvenu kuglicu iznosi $\frac{3}{11}$, koliko je žutih kuglica u kutiji?

Rješenje: zadatka dobivamo jednadžbom po nepoznatom broju žutih kuglica - n. Ukupno se od 12 kuglica tri mogu izvući na $\binom{12}{3}$ načina. Povoljno je da to bude jedna od 3 crvene, jedna od n žutih i jedna od $9-n$ plavih:

$$\begin{aligned} \frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{n}{1}\cdot\binom{9-n}{1}}{\binom{12}{3}} &= \frac{3}{11} \\ n(9-n) &= 20. \end{aligned}$$

Dobivaju se dva rješenja za broj žutih kuglica: $n = 5, 4$.

11. U dvorani je prisutno 12 studentica i 18 studenata. Slučajnim se izborom bira tročlana delegacija. Kolika je vjerojatnost da su izabrana:

(a) tri studenta

(b) tri studentice

(c) dvije studentice i student?

Rješenja:

(a)

$$p(A) = \frac{\binom{18}{3}}{\binom{30}{3}} = 0.20$$

(b)

$$p(B) = \frac{\binom{12}{3}}{\binom{30}{3}} = 0.05$$

(c)

$$p(C) = \frac{\binom{18}{1}\cdot\binom{12}{2}}{\binom{30}{3}} = 0.2926$$

12. Kutija sadrži 12 loptica za stolni tenis, od kojih su 4 loše. Na slučajan način izvadimo odjednom 7 loptica. Kolika je vjerojatnost da će među njima biti

    (a) najviše jedna loša loptica

    (b) 2 loše ili 4 loše loptice

    Rješenje:

    (a)

$$p(A) = \frac{\binom{8}{7} + \binom{8}{6} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{12}{7}}$$

    (b)

$$p(B) = \frac{\binom{8}{5} \cdot \binom{4}{2} + \binom{8}{3} \cdot \binom{4}{4}}{\binom{12}{7}}$$

13. Koja je vjerojatnost da se šestica pojavi u n bacanja kocke? Napišite formulu po kojoj se vjerojatnost računa i nacrtajte graf funkcije $p = p(n)$. Koliko puta treba baciti kocku pa da pojavu šestice garantira s vjerojatnosti barem $0,9$?

    Rješenje:

    (a)

$$p = 1 - (\frac{5}{6})^n$$

    (b)

$$\begin{aligned} 1 - (\frac{5}{6}) &\geq 0,9 \\ (\frac{5}{6})^n &\leq 0,1 \\ n &\geq 13 \end{aligned}$$

14. Bacaju se dvije kocke. Koja je vjerojatnost da na obje kocke padne isti broj ili da zbroj bude 8? ($\frac{10}{36}$)

15. Koliko je vjerojatno da pri bacanju dviju kocaka na bar jednoj padne petica?

Rješenje: se dobiva preko suprotne vjerojatnosti:

$$p = 1 - p(A^c)p(B^c) = 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{11}{36},$$

gdje je

događaj A - na prvoj je kocki pala petica

događaj B - na drugoj je kocki pala petica.

2.2 Problemski zadaci

1. U kutiji se nalazi 16 proizvoda, od kojih su 4 neispravna. Na slučajan način se izvlači 5 proizvoda. Kolika je vjerojatnost da medju njima bude barem jedan neispravan?

2. Student je izašao na ispit znajući odgovor na 20 od mogućih 26 pitanja. Profesor postavlja tri pitanja za redom. Kolika je vjerojatnost da student zna odgovor:

   (a) na sva tri pitanja

   (b) na barem jedno pitanje?

3. Uzorak sadrži dva puta više ispravnih nego neispravnih proizvoda. Ako slučajno biramo četiri proizvoda, vjerojatnost da medju njima budu dva ispravna i dva neispravna iznosi 30/91. Koliko proizvoda sadrži uzorak?

4. U kutiji se nalazi 20% manje bijelih nego crnih kuglica. Na slučajan način biramo dvije kuglice. Ako vjerojatnost da izvučemo barem jednu bijelu kuglicu iznosi $\frac{12}{17}$, koliko je crnih kuglica u kutiji?

5. Iz kutije u kojoj se nalaze 4 plave, 5 žutih i crvene kuglice, na slučajan način izvlačimo dvije kuglice. Vjerojatnost da ne izaberemo nijednu crvenu iznosi 30%. Koliko je kuglica u kutiji?

6. U kutiji je 15 kuglica: crvene, plave i tri žute. Na slučajan način biramo tri kuglice. Vjerojatnost da izaberemo po jednu crvenu, plavu i žutu iznosi $\frac{3}{13}$. Koliko je plavih kuglica u kutiji?

7. Koji postotak peteroznamenkastih brojeva

   (a) sadrži znamenku 5,

   (b) djeljiv je s 20, a ne sadrži znamenke 8 i 9?

8. U kutiji se nalazi 50% više bijelih nego crvenih kuglica. Na slučajan se način biraju tri kuglice. Ako je vjerojatnost da izvučemo jednu crvenu kuglicu i dvije bijele jednaka 0.5, koliko je bijelih kuglica u kutiji?

2.3 Geometrijska vjerojatnost

Neka je moguće uzeti mjeru skupu Ω i svakom njegovom podskupu. Vjerojatnost događaja A tada je:

$$p(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

Primjer 6 *U krug je upisan kvadrat. Kolika je vjerojatnost da s propisane udaljenosti pikado pogodi dio kruga izvan kvadrata?*

Rješenje je jasno iz nacrtane situacije i račun je slijedeći:

$$p = \frac{2r^2}{r^2\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

Zadatak 20 *Prometna nesreća dogodila se između 8 i 9 sati. Koliko je vjerojatno da se dogodilo između* $8:25$ *i* $8:40$*?*

Vjerojatnost je u omjeru minuta:

$$p = \frac{15}{60} = 25\%.$$

Zadatak 21 *Dva vlaka duljine* $200m$ *kreću se brzinom* $72km/h$ *prugama koje se međusobno križaju. Trenutak u kojem će oni ući u križanje slučajan je između 22 sata i* $22:30$. *Koja je vjerojatnost da će se vlakovi zakačiti?*

Neka je

> x - trenutak ulaska prvog vlaka u križanje
>
> y - trenutak ulaska drugog vlaka u križanje

Ako prvi vlak uđe u križanje točno u 22 sata stavimo $x = 0$, a u $22:30$, onda neka je $x = 1800$. Sada je

$$(x, y) \in [0, 1800] \times [0, 1800]$$

Dakle, Ω možemo nacrtati u XOY ravnini kao kvadrat. Mjere su iskazane u sekundama. Unutar kvadrata 1800×1800 rješava se nejednadžba uvjeta njihovog susreta:

$$|x - y| \leq \frac{200m}{20m/s}$$

Tražena vjerojatnost je

$$p = \frac{1800^2 - 1790}{1800^2} = 4,4\%.$$

Zadaci

1. Iz intervala $[0, 10]$ biraju se dva realna broja. Kolika je vjerojatnost da njihov zbroj bude veći od 8, a apsolutna vrijednost njihove razlike veća od 3? $(\frac{39}{200})$

2. Iz intervala $[0, 1]$ na slučajan način biraju se dva broja. Kolika je vjerojatnost da njihov zbroj bude veći od $\frac{1}{3}$, a apsolutna vrijednost njihove razlike manja od $\frac{1}{3}$?

3. Iz intervala $[-1, 1]$ biraju se dva broja. Kolika je vjerojatnost da njihov zbroj bude pozitivan, umnožak negativan, a zbroj kvadrata mani od 1?

4. Iz intervala $[0, 2]$ na slučajan se način biraju dva broja. Kolika je vjerojatnost da njihov zbroj bude manji od 3, a razlika po apsolutnoj vrijednosti manja od 1?

5. Dečko i cura dogovore susret između $7:00$ i $8:00$ na trgu. Dogovore se, da ono koje dođe prvo, čeka drugo $20min$. Kolika je vjerojatnost da će se ipak susresti?

2.4 Uvjetna vjerojatnost

Neka su A i B događaji iz vjerojatnosnog prostora Ω. Računamo vjerojatnost da se dogodio događaj A uz uvjet da nam je poznato da se dogodio događaj B.

Primjer 7 *Kocka je bačena i pao je neparan broj. Kolika je vjerojatnost da je pao tri? Kolika je vjerojatnost da je pao broj dva?*

Tražena vjerojatnost je $1 : 3 = 33,3\%$.

Općenito formula koja računa uvjetnu vjerojatnost je

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Zadatak 22 *Vjerojatnost da su oba blizanca muškog spola je 40%, a da su ženskog je 35%. Pri porodu, prvo se rodilo muško. Koja je vjerojatnost da i drugo bude muško?*

Blizanci se mogu donijeti na svijet na tri disjunktna načina:

A - dva dječaka

B - dvije djevojčice

C - djevojčica i dječak

Traži se

$$\begin{aligned} p(A/(A \cup C)) &= \frac{p(A \cap (A \cup C))}{p(A \cap B)} \\ &= \frac{0,4}{0,65} \\ &= 61,5\% \end{aligned}$$

Događaji A i B su nezavisni, ako informacija o događaju B ne utiče na vjerojatnost događaja A. Tada je

$$p(A/B) = p(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

i slijedi

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B).$$

Primjer 8 *Dobar, loš i zao strijelac gađaju metu. Dobar pogađa s vjerojatnošću 80%, loš sa 60% i zao s 90%. Koliko je vjerojatno da u meti završi samo jedan metak, ako sva trojica gađaju samo s po jednim metkom?*

Budući pogodak ili promašaj bilo kojeg od njih ne utiče na gađanje ostalih, tražena vjerojatnost je:

$$p = 0,8 \cdot 0,4 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,6 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,4 \cdot 0,9 = 11,6\%.$$

Zadaci:

1. Tri strijelca gađaju jednu te istu metu. Vjerojatnost pogotka kod svakog strijelca redom iznosi 80%, 70% i 60%. Kolika je vjerojatnost

(a) točno jednog pogotka u metu

(b) bar jednog pogotka u metu

(c) najviše dva pogotka u metu

2. Vjerojatnost da avion bude oboren prije nego što dospije do cilja je 5%. Ako dospije do cilja, avion ga uništava s vjerojatnosti od 40%. Koja je vjerojatnost da avion uništi cilj? (0,38)

3. Na stolu su dvije jednake, neprozirne kutije. U prvom su kuglice s brojevima 2,4,6 i 8. U drugoj su kuglice s brojevima 1,3,5 i 7. Na sreću biramo kutiju i izvlačimo kuglicu. Ako je na njoj paran broj, iz iste kutije izvučemo još jednu kuglicu. U suprotnom izvlačimo iz druge kutije. Kolika je vjerojatnost da je izvučen jedan paran i jedan neparan broj?

   Rješenje zadatka je u opisu postupka povoljnog izvlačenja kada je poželjno odabrati drugu kutiju. Vjerojatnost je 50%

2.5 Potpuna vjerojatnost. Bayesova formula.

Potpun sistem događaja čine događaji

$$H_1, H_2, \ldots H_n \subset \Omega$$

ako vrijedi slijedeće:

$$\begin{aligned} \bigcup_i H_i &= \Omega \\ H_i \cap H_j &= \emptyset \end{aligned}$$

Formula totalne vjerojatnosti događaja $A \subset \Omega$ je formula:

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(A/H_i) \cdot p(H_i)$$

Bayesova formula služi za aposteriorno izračunavanje vjerojatnosti pojedinih hipoteza ako je poznato da se dogodio događaj A:

$$p(H_i/A) = \frac{p(H_i) \cdot p(A/H_i)}{p(A)}$$

Zadatak 23 *Žarulje se proizvode u tri pogona. Prvi pogon daje* 50% *proizvodnje, drugi* 30% *i treći* 20%. *Postotak neispravnih žarulja iz prvog pogona je 10%, iz drugog 15%, a iz trećeg 8%. Kolika je vjerojatnost da je slučajno izabran proizvod neispravan? Kolika je vjerojatnost da je neispravan proizvod proizveden na prvom stroju?*

Sistem hipoteza u ovom slučaju:

H_1 - proizvod je iz prvog pogona

H_2 - proizvod je iz drugog pogona

H_3 - proizvod je iz trećeg pogona

Vjerojatnosti hipoteza i uvjetne vjerojatnosti su:

$$\begin{array}{ll} p(H_1) = 0.5 & p(A/H_1) = 0.1 \\ p(H_2) = 0.3 & p(A/H_2) = 0.15 \\ p(H_3) = 0.2 & p(A/H_3) = 0.08 \end{array}$$

Formula totalne vjerojatnosti daje:

$$p(A) = \sum_{i=1}^{3} p(A/H_i) \cdot p(H_i) = 0.131$$

Odgovor na drugo pitanje daje Bayesova formula:

$$\begin{aligned} p(H_1/A) &= \frac{p(A/H_1) \cdot p(A)}{p(A)} \\ &= \frac{0,1 \cdot 0,5}{0,131} \\ &= 0,38 \end{aligned}$$

Zadaci:

1. Jedan tip proizvoda izrađuje se 4 stroja. Na stroju S_1 izrađuje se 40% proizvodnje od čega je 0,1% škarta, na S_2 se radi 30% i od tiga je 0,2% škarta, na S_3 20% sa 0,25% škarta i na S_4 10% proizvodnje sa 0,5% škarta. Kolika je vjerojatnost:
   (a) da je proizvod dobar
   (b) ako je škart, da je izrađen na stroju S_1?

2. Strijelci Mate i Ante, svaki sa po jednim metkom, gađaju cilj. Mate pogađa s vjerojatnosti $0,8$, a Ante s $0,4$. Utvrđeno je da je meta pogođena jednim metkom. Kolika je vjerojatnost da je metu pogodio Mate?
3. U uzorku ispitanika, u kojem je dio muškaraca 55%, 70% muškaraca i 60% žena puši. Kolika je vjerojatnost da slučajno odabrana osoba puši? Kolika je vjerojatnost da je slučajno odabrana osoba koja puši, muškarac?

3 Slučajne varijable

Slučajna varijabla je veličina koja se dobije mjerenjem u vezi s nekim slučajnim pokusom. Ona poprima svoje vrijednosti uz određene vjerojatnosti.

Neka je Ω vjerojatnosni prostor. Slučajna varijabla je funkcija

$$X : \Omega \to R,$$

tako da vrijedi:

$$x \in R \Rightarrow X^{-1}(x) \subset \Omega.$$

Postoje diskretne i kontinuirane slučajne varijable.

3.1 Diskretne slučajne varijable

Skup vrijednosti

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots\}$$

je konačan ili prebrojiv. Uglavnom će se promatrati konačni skupovi.

Takva definicija omogućava prirodnu funkciju gustoće vjerojatnosti

$$f = p \circ X^{-1} : R \to [0, 1]$$

gdje je

$$p : \Omega \to [0, 1]$$

funkcija vjerojatnosti definirana na prostoru događaja Ω.

Funkcija gustoće vjerojatnosti ima slijedeće osobine:

1. $$f(x) \geq 0$$

2.

$$\sum_{x \in R} f(x) = 1$$

Zadatak 24 *Slučajan pokus je bacanje dviju kocaka. Slučajna varijabla neka je zbroj na kockama. Odredite prostor elementarnih događaja, skup vrijednosti slučajne varijable i funkciju gustoće vjerojatnosti, a zatim nacrtajte graf funkcije gustoće vjerojatnosti.*

Rješenje:

- prostor događaja:

$$\Omega = \{(i, j); \quad 1 \leq i, j \leq 6\},$$

- vrijednosti slučajne varijable:

$$X(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

- funkcija gustoće vjerojatnosti dana je tablicom:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f(X)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Funkcija gustoće vjerojatnosti jednaka je nuli za realne brojeve koje slučajna varijabla ne poprima. To se najbolje može predočiti grafički.

Primjer

1. Bacanje dviju kocaka ima za slučajnu varijablu manji od brojeva koji su pali. Odredite prostor elementarnih događaja, vrijednosti slučajne varijable i funkciju gustoće vjerojatnosti.

Funkcija vjerojatnosti kod diskretnih slučajnih varijabli jednaka je funkciji gustoće vjerojatnosti:

$$p(X = x) = f(x).$$

Oznaka

$$p(X = x) = p(X^{-1}(x))$$

predstavlja vjerojatnost događaja u kojem slučajna varijabla poprima vrijednost x.

Funkcija distribucije slučajne varijable X kumulativna je funkcija:

$$F_X(x) = p(X \leq x).$$

Vjerojatnost $p(X \leq x)$ jednaka je vjerojatnosti da slučajna varijabla poprimi vrijednost manju ili jednaku vrijednosti x:

$$p(X \leq x) = p(\bigcup_{y \leq x} X^{-1}(y)).$$

Funkcija distribucije

$$F : R \to [0, 1]$$

je funkcija:

- neopadajuća
- neprekidna sdesna
- vrijedi:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0;$$
$$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$$

Zadatak 25 *Slučajna varijabla kod bacanja igraće kocke X = vrijednost je okrenutog broja. Odredite prostor elementarnih događaja, vrijednosti slučajne varijable, nacrtajte funkciju gustoće vjerojatnosti i funkciju distribucije.*

Rješenje:

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $$f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{1}{6}, & x \in \{1, 2, \ldots 6\} \\ 0 & ostalo \end{array} \right\}$$
- tablica funkcije distribucije:

X	1	2	3	4	5	6
f(X)	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	1

Matematičko očekivanje diskretne slučajne varijable X je broj:

$$E(X) = \sum_i x_i \cdot p(X = x_i) = \sum_i x_i p_i = \sum_i x_i \cdot f(x_i)$$

Varijanca diskretne slučajne varijable je matematičko očekivanje kvadrata odstupanja slučajne varijable od očekivanja:

$$VarX = E[(X - EX)^2] = \sum_i (x_i - EX)^2 \cdot p_i.$$

Algebarski se može dokazati

$$VarX = EX^2 - (EX)^2 = \sum_i x_i^2 \cdot f(x_i) - (EX)^2.$$

Standardna devijacija je mjera rasipanja rezultata i računa se po formuli

$$\sigma = \sqrt{VarX}.$$

Vjerojatnost da je slučajna varijabla poprimila vrijednost unutar intervala

$$[EX - \sigma, EX + \sigma]$$

nije manja od 68%.

Primjer 9 *Odredite matematičko očekivanje i standardnu devijaciju u zadatku 25.*

(rješenje: $EX = 3.5, VarX =$)

Zadatak 26 *U kutiju sa devet bijelih ping-pong loptica ubačene su tri žute. Bira se uzorak od tri loptice. Slučajna varijabla je broj žutih loptica u uzorku. Odredite matematičko očekivanje i standardnu devijaciju. Kolika je vjerojatnost da su izvučene barem dvije žute?*

(rješenje: $EX = 0.75$, $\sigma =$, $p(X \geq 2) = \frac{28}{220}$)

Zadatak 27 *U kutije se nalaze 24 kuglice, od kojih su 4 šarene, dok su ostale pune, jednobojne kuglice. Kuglice izvlačimo jednu za drugom dok ne izvučemo jednobojnu kuglicu. Kuglice su jednake po masi i veličini. Ako je slučajna varijabla jednaka broju izvučenih kuglica, odredite očekivani broj izvlačenja, standardnu devijaciju i nacrtajte funkciju distribucije.*

(rješenje: $EX = 1,195$, $VarX =$)

Zadatak 28 *Dva strijelca gađaju metu s po jednim metkom. Vjerojatnost da prvi strijelac pogodi metu je 70%, a da je pogodi drugi iznosi 40%. Slučajna varijabla broj je pogodaka u metu. Odredite slučajnu varijablu, očekivanje, varijancu i funkciju distribuciju slučajne varijable.*

(rješenje: $EX = 1.1$, $VarX = 0.45$, $\sigma =$)

Zadatak 29 *Tri strijelca gađaju metu s po jednim metkom i pogađaju je s vjerojatnostima 0.9, 0.7 i 0.6. Slučajna varijabla je broj pogodaka u metu. Nađite gustoću i distribuciju vjerojatnosti, očekivanje i vjerojatnosti da će meta biti*

- *bar jednom pogođena*

- *bar dvaput pogođena*

(rješenje:$EX = 2.2$, $p(X \geq 0) = 0.998$, $p(X \geq 2) = 1 - F(1) = 1 - 0.167$.)

Zadatak 30 *Igrač baca 3 novčića. Dobiva* 5 *ako padnu* $3G$, 3 *za* $2G$ *i* 1 *za jednu "glavu". Igrač gubi* 15 *za* $3P$. *Odredite funkciju gustoće vjerojatnosti za slučajnu varijablu* X*-dobitak u igri. Izračunajte očekivanje slučajne varijable. Da li je igra poštena?*

Rješenje

- Slučajna varijabla i pripadne vjerojatnosti dane su u tablici:

X	-15	1	3	5
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
$x \cdot f(x)$	$\frac{-15}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{8}$

- očekivanje je zbroj zadnjeg retka i iznosi

$$E(X) = \frac{2}{8} = 0.25$$

- Igra je na strani igrača, jer se očekuje prosječan dobitak po igri od četvrtine Eura.

Zadaci:

1. Prirodni broj naziva se prostim, ako ima točno dva različita djelitelj, a složenim ako ima više od dva različita djelitelja. Bacamo kocku. Prosti broj donosi tri boda, složeni donosi dva, a ako padne broj koji nije niti prost niti složen, tada igrač dobiva 11 bodova. Nađite očekivani broj bodova i standardnu devijaciju.
(*Rješenje:* $\mu = 4$, $\sigma = 3.2$

)

2. U kutiji se nalazi jedna bijela, dvije crne, četiri crvene i jedna prlava kuglica. Ako igrač izvuče bijelu, gubi četiri kune, za crnu gubi 5 kuna, a za trvenu dobiva dvije kune. Odredite očekivanje i ocijenite da li je igra poštena?
Rješenje: $\mu = -1$, NE

3. Simetrični novčić baca se sve dok se ne pojavi glava ili pet pisama za redom. Odredite očekivani broj bacanja novčića i standardnu devijaciju.
(*Rješenje:* $\mu = 1.9$, $\sigma = 1.2$)

4. Meta za zračnicu promjera je $20cm$. Ona se sastoji od tri koncentrična kruga. Prvi krug ima promjer $4cm$, a drugi $12cm$. Pogodak u unutrašnji krug nosi 10 bodova, pogodak u prvi slijedeći prsten nosi 5 bodova, a pogodak u vanjski prsten nosi 3 boda. Vjerojatnost da strijelac uopće pogodi metu je 50%. Ako je slučajna varijabla broj dobivenih bodova, nađite njeno očekivanje i standardnu devijaciju.
(*Rješenje:* $\mu = 1.96$, $\sigma = 1.76$)

5. Igrač baca dva simetrična novčića. On dobiva $10kn$ ako se pojavi jedna glava, $20kn$ ako se pojave dvije glave i gubi $50kn$ ako se ne pojavi glava ni na jednom novčiću. Da li je igra poštena?
(*Rješenje:* $\mu = -0.25$, NE)

6. Igrač baca dva simetrična novčića. Dobiva $5kn$ u slučaju javljanja dvije glave, $2kn$ u slučaju jedne glave i $1kn$ ako se glava ne pojavi. Koliko igrač treba igru platiti organizatoru, pa da bude poštena. Troškova dodatnih nema.
(*Rješenje:* $2.5kn$.)

7. Ako se na radaru uhvati neprijateljski avion, tada ispaljena raketa s 20% pogađa rep, s 30% krilo i s 50% trup. Pogodi li krilo ili rep, avion je srušen, a u trup trebaju tri rakete za obaranje aviona. Avion je uhvaćen u radar i otvorena je vatra raketama. Odredite očekivani broj ispaljenih raketa.
(*Rješenje:* $\mu = 1.75$)

8. Strijelac koji ima četiri metka, gađa cilj dok ga ne pogodi. Ako je vrerojatnost pogotka cilja pri svakom gađanjui 80%, odredite očekivani

broj hitaca i standardnu devijaciju.
Rješenje: $\mu = 0.546$, $\sigma = 1.248$)

3.2 Binomna razdioba

Binomna razdioba ili binomna distribucija pretpostavlja n ponavljanja jednog te istog slučajnog pokusa koji može imati samo dva ishoda:

- ”uspjeh”, kojem se vjerojatnost označava s p
- ”neuspjeh”, kojem je vjerojatnost $q = 1 - p$

Slučajna varijabla X koja je jednaka broju uspjeha u n ponavljanja pokusa zove se **Binomna** slučajna varijabla.

Parametri Binomne slučajne varijable su

- broj ponavljanja pokusa n
- vjerojatnost ”uspjeha” p

Oznaka binomne slučajne varijable je

$$X \sim B(n, p)$$

Funkcija gustoće vjerojatnost definira se preko vjerojatnosti

$$f(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} \cdot p^x \cdot q^{n-k}, & x = 0, 1, \ldots n \\ 0, & x \neq 0, 1, \ldots n \end{cases}$$

Funkcija distribucije vjerojatnosti računa se zbrajanjem:

$$F(x) = p(X \leq x) = \sum_{k \leq x} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

Matematičko očekivanje slučajne varijable

$$EX = np$$

Varijanca binomne slučajne varijable je

$$VarX = npq$$

Primjer 10 *Neka je* $X \sim B(6, 0.7)$*, gdje je* $n = 6$*,* $p = 0,7$*. Koristeći tablicu ispišite funkciju gustoće vjerojatnosti, funkciju distribucije, izračunajte matematičko očekivanje i varijancu. Nacrtajte grafove funkcija gustoće i distribucije vjerojatnosti.*

Funkcije su zadane tablicom:

X	0	1	2	3	4	5	6
f(X)	0.0007	0.0102	0.0595	0.1832	0.3241	0.3136	0.1187
F(X)	0.0007	0.0109	0.0704	0.2536	0.5777	0.8813	1

Pri popunjavanju tablice mudro je koristiti se tablicama.

$$\begin{aligned} EX &= np = 4,2 \\ VarX &= 12,6 \end{aligned}$$

Zadatak 31 *Vjerojatnost pogotka u metu je* $0,75$*. Meta se gađa četiri puta. Naći:*

a) skup vrijednosti slučajne varijable broja pogodaka u metu

b) $f(x), F(x), EX, VarX$

c) vjerojatnost da je meta pogođena barem jednom

d) vjerojatnost da je meta promašena bar jednom

Rješenje zadatka pod

a) vrijednosti slučajne varijable $B(4, 0.75)$ su

$$X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

b) gustoća vjerojatnosti

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.0039 & 0.0469 & 0.2109 & 0.4219 & 0.3164 \end{pmatrix}$$

funkcija distribucije

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.0039, & 0 \leq x < 1 \\ 0.0508, & 1 \leq x < 2 \\ 0.2617 & 2 \leq x < 3 \\ 0.6836 & 3 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} EX &= np = 3 \\ VarX &= npq = 0.75 \end{aligned}$$

c) bar jedan pogodak je vjerojatan

$$p(x \geq 1) = 1 - p(x < 1) = 1 - p(0) = 0.996$$

a bar jedan promašaj

$$p(x < 4) = F(3) = 0,6863$$

Zadatak 32 *Operacija uspjeva u 75% slučajeva. Koliko je vjerojatno da 75% od 8 pacijenata ima uspjelu operaciju?*

Rješenje zadatka:

- uočiti binomnu razdiobu $B(8, 0.75)$
- izračunati 75% od 8 da je 6
- izračunati ili prepisati iz tablice

$$\begin{aligned} p(x = 6) &= \binom{8}{6} \cdot 0.75^6 \cdot 0.25^{8-6} \\ &= 28 \cdot 0.18 \cdot 0.0625 \\ &= 0.315 \end{aligned}$$

Teorem 2 *Kod binomne razdiobe $X \sim B(n, p)$ najveća vjerojatnost pripada onoj diskretnoj vrijednosti slučajne varijable x_0 za koju vrijedi:*

$$np - q \leq x_0 \leq np + q$$

Primjer 11 *Automat izrađuje proizvod i daje* 8% *defektnih proizvoda. Proizvodi se bez kontrole pakiraju u kutije od po 30 komada. Koliko še neispravnih proizvoda biti najčešče u kutiji?*

Rješenje primjera jednostavna je primjena teorema za

$$
\begin{aligned}
n &= 30 \\
p &= 0.08 \\
30 \cdot 0,08 - 0,95 \leq x_0 &\leq 30 \cdot 0,08 + 0,95 \\
1,48 \leq x_0 &\leq 2,48 \\
x_0 &= 2
\end{aligned}
$$

3.3 Poissonova distribucija

Poisonova razdioba granični je slučaj binomne distribucije kada $n \to infty$, a vjerojatnost "uspjeha" je relativno mala:

$$\lim_{n \to infty} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!},$$

gdje je

$$
\begin{aligned}
\lambda &= np \\
x &= 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

Dobri se rezultati postižu za $np \leq 10$. Funkcija gustoće vjerojatnosti definira se preko funkcije vjerojatnosti. Funkcija distribucije, očekivanje i varijanca računaju se prema formulama:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} \\
F(x) &= \sum_{y \leq x} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^y}{y!} \\
EX = \lambda \\
VarX &= \lambda
\end{aligned}
$$

Primjer 12 *Neka škola ima 2190 učenika. Koliko je vjerojatno da je pet učenika rođeno na Novu godinu? Koja je vjerojatnost da su barem tri učenika rođena na Novu godinu?*

Rješavanje zadatka bilo bi neprikladno pomoću binomne razdiobe, jer je $n = 2190$, a $p = \frac{1}{365}$. Parametar λ dobiva se iz jednakosti

$$\lambda = np = 6$$

Vjerojatnost da je točno pet učenika rođeno na Novu godinu jednaka je vrijednosti gustoće vjerojatnosti za $x = 5$:

$$p(x = 5) = f(5) = e^{-6} \cdot \frac{6^5}{5!} = 0,16062$$

Vjerojatnost da su barem trojica rođeni na Novu godinu dobiva pomoću funkcije distribucije:

$$\begin{aligned} p(x \geq 3) = 1 - p(x \leq 2) &= 1 - F(2) \\ &= 1 - (f(0) + f(1) + f(2)) \\ &= 0,9380 \end{aligned}$$

Umjesto računanja možemo se koristiti tablicama.

Zadatak 33 *Statistički je utvrđeno da je 1% ljevorukih ljudi. Kolika je vjerojatnost da između 200 slučajno izabranih osoba bude*

a) točno četiri ljevaka

b) ne manje od četiri ljevaka

Rješenje zadatka tražimo Poissonovom razdiobom, budući se radi o

$$X \sim B(200, 0.01)$$

Očekivani broj ljevorukih ljudi u uzorku od 200 ljudi je

$$np = \lambda = 2 < 10$$

Koristeći tablice, dobivamo prvi odgovor:

$$p(X = 4) = f(4) = \frac{2^4}{4!} \cdot e^{-2} = 0.0902$$

i odmah zatim i drugi odgovor:

$$p(x \geq 4) = 1 - p(x \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - 0,8571 = 0,1428.$$

Zadatak 34 *Telefonska centrala ima prosječno po satu 300 zahtjeva za uspostavljanjem telefonske veze. Centrala može u minuti ostvariti maksimalno 10 veza. Kolika je vjerojatnost da će centrala biti preopterećena u toku proizvoljne minute, ako se broj zahtjeva ravna po Poissonovom zakonu vjerojatnosti.*

Rješenje zadatka traži otkrivanje parametra λ. Ako matematičko očekivanje predstavlja očekivanu vrijednost slučajne varijable, a u ovom zadatku očekujemo u minuti

$$\frac{300}{60} = 5$$

poziva, to je

$$\lambda = 5$$

Budući preopterećenje vrijedi kad je broj zahtjeva

$$\begin{aligned} x &> 10 \\ p(x > 10) &= 1 - p(x \leq 10) = 1 - F(10) \\ &= 1 - 0,9863 = 0,0137 \end{aligned}$$

Zadatak 35 *Od milijun stanovnika jednog grada smrtno je stradalo u prometnim nesrećama u toku jedne godine 730 osoba. Kolika je vjerojatnost da u jednom danu*

a) ne bude nastradalih

b) nastradaju petorica

c) ne nastrada više od trojice?

d) Uz vjerojatnost od 95% *prognozirajte gornju granicu broja poginulih u jednom danu, ako je taj broj slučajna varijabla Poissonove razdiobe.*

Riješen je zadatak ako izračunamo parametar λ, koji odgovar očekivanom broju od, nažalost,

$$\frac{730}{365} = 2$$

smrtno stradala građana.

a) $p(x = 0) = f(0) = e^{-2}\frac{2^0}{0!} = 13.5\%$

b) $p(x=5)=f(5)=e^{-2}\frac{2^5}{5!}=3.6\%$

c) iz tablica: $p(x\leq 3)=F(3)=67.7\%$

d) Problem je riješen kada se otkrije onaj broj stradalih x za koji je

$$p(X\leq x)=0,95$$

Iz tablica distribucije to je nepoznata vrijednost x za koju je

$$F(x)=0,95$$

dakle $x=4$.

Bez tablica, rješavanje bi bilo gotovo nemoguće i moralo bi se izvoditi pogađanjem.

Zadaci

1. Broj automobila koji dolaze na parkiralište u jednom satu imaju Poissonovu razdiobu s očekivanim brojem od 25.3 automobila u jednom satu. Kolika je vjerojatnost dolaska automobila na parkiralište u intervalu od pet minuta kada je parkiralište popunjeno?

2. Broj automobila koji dolati na raskršće ima Poissonovu razdiobu s očekivanjem dolaska 12.5 automobila u 3 minute. Kolika je vjerojatnost dolaska više od 5 automobila u 30 sekundi?

3.4 Kontinuirane slučajne varijable

Slučajna varijabla

$$X:\Omega\rightarrow X(\Omega)$$

poprima vrijednosti na neprebrojivom skupu:

$$X(\Omega)\subset R.$$

Funkcija distribucije slučajne varijable je funkcija

$$F:R\rightarrow R$$

koja ima slijedeća svojstva:

1) neopadajuća

2) neprekidna

3) $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$

Funkcija gustoće vjerojatnosti je nenegativna funkcija

$$g : R \to R,$$

takva da je

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt$$

sa svojstvima

1) $g(x) \geq 0, \quad x \in R$

2)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = 1$$

Iz definicije slijedi da je

$$g(x) = F'(x).$$

U slučaju da se lijeva i desna derivacija razlikuju, odaberemo lijevu derivaciju.

Funkcija vjerojatnosti definira se

a) preko funkcije gustoće vjerojatnosti:

$$p(a < x < b) = \int_{a}^{b} g(t)dt$$

b) odnosno preko funkcije distribucije:

$$p(a < x < b) = F(b) - F(a)$$

c) dok vrijedi da je

$$p(X = x) = 0, \quad \forall x \in R.$$

Primjer 13 *Slučajna varijabla X zadana je funkcijom distribucije*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{4}x^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

a) Nacrtati funkciju distribucije

b) Naći funkciju gustoće i nacrtati je

c) Odredite $p(x > 1)$ i $p(1 < x < 1.5)$

Rješenja.

b)

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

c) $p(1 < x < 1.5) = \frac{5}{16}$

Matematičko očekivanje kontinuirane slučajne varijable

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)dx$$

Varijanca kontinuirane slučajne varijable

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}(x - E(X))g(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x)dx - (E(X))^2.$$

Zadatak 36 *Odredite matematičko očekivanje i varijancu iz primjera.*

Rješenje. Dobiva se izravno po definiciji, no potrebno je integrirati po dijelovima:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{0} 0xdx + \int_{0}^{2} x \cdot \frac{1}{2}xdx + \int_{2}^{+\infty} x \cdot 0dx \\ &= \frac{4}{3} \\ Var(X) &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

Zadaci:

1. Neka je X neprekidna slučajna varijabla s gustoćom vjerojatnosti

$$g(x) = \begin{cases} kx, & 0 \leq x \leq 5 \\ 0, & ostalo \end{cases}$$

   (a) odrediti k
   (b) odrediti funkciju distribucije
   (c) izračunati $p(x \leq 3)$, $p(2 < x < 4)$ i $p(x > 4)$
   (d) izračunati $E(X)$, $Var(X)$.

   (rješenja: $k = \frac{2}{25}$; $g(x) = \frac{2}{25}x, \quad 0 \leq x \leq 5; \quad ostalo \quad 0$; $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{25}x^2, & 0 < x < 5 \\ 1 & x > 5 \end{cases}$, $p_1 = \frac{9}{25}$, $p_2 = \frac{12}{25}$ i $p_3 = \frac{9}{25}$.)

2. Gustoća vjerojatnosti slučajne varijable X dana je sa

$$g(x) = \begin{cases} Acosx, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

   Izračunajte vrijednost parametra A, odredite i nacrtajte funkciju distribucije, matematičko očekivanje i varijancu. Odredite $p(-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ i $p(x \geq \frac{\pi}{6}$. (rj: $A = 0.5$, $E(X) = 0$, $p_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $p_2 = 0.25$)

3. Zadana je gustoća slučajne varijable X:

$$f(x) = \begin{cases} a(1 - x^2), & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & ostalo \end{cases}$$

   a) Odredite vrijednost parametra a i nacrtajte graf funkcije gustoće $f(x)$.
   b) Nađite i nacrtajte funkciju distribucije $F(x)$.
   c) izračunajte matematičko očekivanje $E(X)$
   d) odredite $p(X > 0, 5)$.

3.5 Uniformna razdioba

Funkcija gustoće vjerojatnosti uniformne razdiobe

$$f(x) = \begin{cases} k, & a \leq x \leq b \\ 0, & ostalo \end{cases}$$

Konstanta k računa se iz zahtjeva

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} = \int_a^b k dx &= k(b-a) = 1 \\ k &= \frac{1}{b-a} \end{aligned}$$

Funkcija distribucije

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a} \\ &= \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \end{cases} \end{aligned}$$

Matematičko očekivanje uniformne razdiobe

$$EX = \int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2}.$$

Varijanca

$$VarX = \frac{(b-a)^2}{12},$$

dok je standardna devijacija

$$\sigma = \sqrt{VarX}.$$

Zadatak 37 *Dojavljeno je policiji da svake noći između 2 i 3 sata kroz crveno projuri jedan te isti auto. Nacrtajte funkciju gustoće vjerojatnosti i funkciju razdiobe. Izračunajte matematičko očekivanje i standardnu devijaciju. Koliko je vjerojatno da će proći kroz crveno:*

a) točno u $2:25$

b) prije $2:15$

c) između $2:35$ *i* $5:00$

d) prije $8:00$ *sati*

(Rješenje:a)$p=0$;b)$p=25\%$;c)$p=\frac{5}{12}$;d)$p=1$)

3.6 Eksponencijalna razdioba

Eksponencijalna razdioba zadana je pozitivnom konstantom $\lambda > 0$. Funkcija gustoće vjerojatnosti slučajne varijable t:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & ostalo \end{cases}$$

Uvjet normiranosti je zadovoljen:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt &= \lambda \cdot \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\Big|_0^{+\infty} \\ &= -(\lim_{t\to\infty} e^{-\lambda t} - 1) \\ &= 1, \end{aligned}$$

jer je

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\lambda t} = 0.$$

Oznaka t slučajne varijable sugerira njeno značenje vremenskog trajanja koje je vjerojatnije ako je kraće. Obično su to trajanja usluga na šalterima, vrijeme između dva nailaska vozila, vrijeme potrebno za otpremu telegrama, putovanje E-maila...

Funkcija distribucije daje vjerojatnost da se ne prekorači predviđeno vrijeme za obavljanje usluge:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Vjerojatnost da usluga traje od najmanje a do najviše b vremenskih jedinica:

$$p(a \leq t \leq b) = e^{-a\lambda} - e^{-b\lambda}.$$

Očekivano trajanje usluge je

$$E(t) = \frac{1}{\lambda}$$

uz varijancu

$$Var(t) = \frac{1}{\lambda^2},$$

odnosno standardnu devijaciju

$$\sigma = \frac{1}{\lambda}.$$

Zadatak 38 *Vremenski razmak između vozila koja prelaze preko pješačkog prijelaza slučajna je veličina eksponencijalne distribucije. Prometno opterećenje ulice iznosi* 600 *vozila po satu. Izračunajte:*

1. *vjerojatnost da nastupi razmak veći od 10 sekundi*
2. *vjerojatnost da razmak između nailazaka bude 5-10 sekundi*
3. *odredite onaj razmak u sekundama iznad kojeg je vjerojatnost* 5%.

Rješenje:

Eksponencijalna je distribucija određena jednim parametrom:

$$\lambda = \frac{1}{EX}$$

Budući se očekuje 600 vozila po satu, to je, u sekundama, očekivani razmak između dva vozila

$$EX = \frac{3600}{600} = 6s,$$

a eksponencijalna razdioba u ovom zadatku dana je formulom gustoće vjerojatnosti

$$f(x) = \frac{1}{6} \cdot e^{-\frac{t}{6}}, \quad t > 0.$$

1. vjerojatnost da nastupi razmak veći od $10s$ je:

$$\begin{aligned} p(t > 10) = 1 - p(t < 10) = 1 - F(10) &= 1 - (1 - e^{-\frac{10}{6}}) \\ &= e^{-\frac{10}{6}} \\ &= 18.9\% \end{aligned}$$

2. vjerojatnost razmaka od 5 do $10s$ je

$$p(5 < t < 10) = e^{-\frac{5}{6}} - e^{-\frac{10}{6}} = 24.6\%$$

3. traži se vremenski razmak t_0, za koji vrijedi

$$\begin{aligned} p(t > t_0) &= 0.05 \\ 1 - F(t_0) &= 0.05 \\ e^{-\frac{t_0}{6}} &= 0.05 | ln \\ -\frac{t_0}{6} &= \ln 0.05 \\ t_0 &= -6 \cdot \ln 0.05 \\ &= 18s \end{aligned}$$

Zadaci

1. Vrijeme čekanja na naplatnim kućicama autoputa slučajna je varijabla eksponencijalne distribucije. Prosječno prođe 120 vozila po satu. Kolika je vjerojatnost

   a) da vozilo čeka dulje od 2 minute

   b) da vozilo čeka 30-60 sekundi?

   c) Uz vjerojatnost 90% odredite gornju granicu vremena čekanja.

2. Vrijeme ispravnog rada nekog uređaja eksponencijalna je slučajna varijabla s očekivanjem neprekidnog rada 2 mjeseca nakon servisa. Kolika je vjerojatnost da će se uređaj pokvariti u toku

   a) prvog mjeseca

   b) drugog mjeseca?

3.7 Normalna razdioba

Normalna razdioba u oznaci $X \sim N(\nu, \sigma^2)$ zadana je s dva parametra: $\nu \in R$, $\sigma > 0$. Normalna razdioba zadana je formulom gustoće vjerojatnosti:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\nu)^2}{2\sigma^2}}$$

Graf funkcije je Gaussova zvonasta krivulja simetrična obzirom na vertikalu $x = \nu$, spljoštenost ovisi o veličini konstante σ.

Matematičko očekivanje normalne slučajne varijable:

$$EX = \nu.$$

Varijanca:

$$VarX = \sigma^2.$$

Funkcija razdiobe

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\nu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

koji nije moguće elementarno izračunati. Računanje vjerojatnosti je moguće samo pomoću tablica ili računala.

3.7.1 Standardna normalna razdioba

Standardna normalna razdioba u oznaci

$$Z \sim N(0,1)$$

ima funkciju gustoće vjerojatnosi

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

ima graf zvonastu Gaussovu krivulju.

Funkcija distribucije

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

čiji graf crtamo zahvaljujući matematici 1. Treba uočiti da je $\Phi(z < -3) = 0$ i da je $\Phi(z > 3) = 1$.

Supstitucija

$$z = \frac{x - \nu}{\sigma}$$

omogućava preko

$$F(x) = \Phi(z)$$

jedino moguće računanje vjerojatnosti

$$p(a < x < b) = F(b) - F(a)$$

Zadatak 39 *Neka je* $X \sim N(4, 1.5^2)$. *Izračunajte*

1. $p(x > 5.2)$, $p(x \geq 4)$
2. *vrijednost slučajne varijable* c *tako da* $p(x < c) = 0.35$

Rješenje zadatka je

1. očito je $p(x \geq 4) = 50\%$

$$\begin{aligned} p(x > 5.2) = 1 - F(5.2) &= 1 - \Phi(\frac{5.2 - 4}{1.5}) \\ &= 1 - \Phi(0.8) = 1 - 0.7881 \\ &= 0.2119 \end{aligned}$$

2. računanje vrijednosti slučajne varijable:

$$\begin{aligned}
p(x \leq c) &= 0.35 \\
F(c) &= 0.35 \\
\Phi(\frac{c-4}{1.5} &= 0.35 \\
\frac{c-4}{1.5} &= -0.385 \\
c &= 3.4225
\end{aligned}$$

uz neophodnu pomoć tablica.

Primjer 14 *Neka su EX i $\sigma > 0$ očekivanje i standardna devijacija slučajne varijable koja je normalno distribuirana. Izračunajte slijedeće vjerojatnosti:*

1. $p(EX - \sigma \leq x \leq EX + \sigma)$
2. $p(EX - 2\sigma \leq x \leq EX + 2\sigma)$
3. $p(EX - 3\sigma \leq x \leq EX + 3\sigma)$

Rješenje se dobiva očitavanjem:

1. $D(1) = 68.27\%$
2. $D(2) = 95.45\%$
3. $D(3) = 99.73\%$

Primjer pokazuje da se unutar $EX \pm \sigma$ nalazi 68.27% vrijednosti slučajne varijable koja je normalno distribuirana. Posljednji dio primjera pokazuje bespotrebnost nastavka tablica preko vrijednosti ± 3 standardizirane varijable.

Primjer 15 *Pretpostavimo da se težina paketa ravna po normalnoj distribuciji u kojoj je srednja vrijednost $\bar{x} = 6.4$, a standarda devijacija $\sigma = 2.1$ Odredite interval u kojem se očekuje težina s vjerojatnosti od* 90%.

Rješenje tražimo u obliku vrijednosti c, za koju vrijedi da je

$$p(EX - c < x < EX + c) = 0.9$$

Kratak račun po definiciji daje

$$\begin{aligned} F(EX+c)-F(EX-c) &= \Phi(\frac{c}{\sigma})-\Phi(\frac{c}{\sigma}) \\ &= D(\frac{c}{\sigma}) \end{aligned}$$

što po uvjetima zadatka daje

$$\begin{aligned} D(\frac{c}{\sigma} &= 0.9 \\ \frac{c}{\sigma} &= 1.64 \\ c &= 3.4 \end{aligned}$$

konačno tražene granice

$$3 \leq x \leq 9.8$$

u kojima se nalazi 90% paketa.

Zadatak 40 *Visina čovjeka je normalna slučajna varijabla s očekivanjem* $EX = 174cm$ *i varijancom* $\sigma^2 = 81cm^2$.

a) *Koliki je postotak ljudi viših od* $2m$*?*

b) *Ispod koje visine je* 5% *ljudi?*

c) *Koliki je postotak ljudi visine* $160-190cm$*?*

Rješenja

a)

$$\begin{aligned} p(x>200) &= 1-F(200)=1-\Phi(\frac{200-174}{9})=1-\Phi(2.89)= \\ &= 1-0.9981=0.0019 \end{aligned}$$

b) traži se visina h

$$\begin{aligned} p(x<h) &= 0.05 \\ \phi(\frac{h-174}{9}) &= 0.05 \\ \frac{h-174}{9} &= -1.645 \\ h &= 159 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
p(160 < x < 190) &= \Phi(\frac{190-174}{9}) - \Phi(\frac{160-174}{9}) = \\
&= \Phi(1.78) - \Phi(-1.56) = \\
&= 0.9625 - 0.0594 = \\
&= 90.31\%
\end{aligned}$$

Zadatak 41 *Neka je broj osvojenih bodova na pismenom ispitu normalno distribuirana slučajna varijabla s očekivanjem* 76 *i standardnom devijacijom 15. Prvih* 15% *studenata dobiva ocjenu odličan, dok zadnjih* 10% *ne prolazi ispit. Nađite*

a) minimalni broj bodova potreban da bi se dobilo odličan

b) minimalni broj bodova potreban da se prođe ispit?

Rješenja:

a) traži se broj a za koji je

$$\begin{aligned}
p(x > a) = 1 - F(a) &= 1 - \Phi(\frac{a-76}{15}) = 0.15 \\
\Phi(\frac{a-76}{15}) &= 0.85 \\
\frac{a-76}{15} &= 1.04 \\
a &= 92
\end{aligned}$$

b) traži se onaj mali broj bodova b ispod kojeg je 10% studenata koji su pali:

$$\begin{aligned}
p(x < b) &= 0.1 \\
\Phi(\frac{b-76}{15}) &= 0.1 \\
\frac{b-76}{15} &= -1.28 \\
b &= 57
\end{aligned}$$

Zadaci

1. Masa čovjeka je normalno distribuirana slučajna varijabla s očekivanjem $EX = 82kg$ i standardnom devijacijom $\sigma = 11kg$.

    a) Koliki postotak ljudi ima masu $60 - 90kg$?

    b) Koliki je postotak težih od $100kg$?

    c) Ispod koje granice je 5% ljudi?

2. Slučajna varijabla X ima normalnu razdiobu

$$N(\nu = 4,23; \sigma^2 = 25,35).$$

    Izračunajte vjerojatnost negativne vrijednosti slučajne varijable X?

3. Slučajna veličina X normalno je distribuirana s parametrima $E(X) = 20$, $\sigma = 2$. Izračunati $p(17 < x < 22)$, $p(x < 18)$ i $p(x \geq 19)$.

4. Slučajna varijabla X normalno je distribuirana s ičekivanjem $E(X) = 34$ i varijancom $Var(X) = 6,25$. Izračunajte $P(X \leq 34)$, $P(X > 29)$ i $P(34 < X < 40)$.

5. Godišnja količina padalina u Zagrebu slučajna je varijabla normalne distribucije s očeivanjem $880mm/m^2$ i standardnom devijacijom $130mm/m^2$. Odrediti:

    a) vjerojatnost da godišnja količina padalina bude iznad tisuću litara po metru kvadratnom

    b) vjerojatnost da godišnja količina padalina bude od 500 do tisuću i dvijesto litara po kvadratnom metru

    c) onu godišnju količinu padalina ispod koje je vjerojatnost 10%?

6. Maksimalna dnevna temperatura zraka u mjesecu lipnju slučajna je veličina X normalno distribuirana s $E(X) = 25C$ i $\sigma = 6C$. Odredite

    (a) vjerojatnost da maksimalna temperatura padne ispod $16C$,

    (b) vjerojatnost da maksimalna temperatura poraste iznad $33C$,

    (c) temperaturu u C iznad kojeg maksimalna temperatura zraka nastupa s vjerojtnošću 1%.

7. Težina čovjeka je slučajna varijabla X normalne razdiobe s $EX = 78kg$, dok je $\sigma = 8kg$.

(a) Iznad koje težine je 0.5% ljudi?

(b) Koliki je postotak ljudi lakših od $50kg$?

(c) Koliki je postotak ljudi između $70kg$ i $80kg$?

4 Problemski zadaci

1. Odredite

   (a) Koliko ima različitih dijeljenja na poker automatu koji daje pet karata iz špila od 52 karte?

   (b) Koliko bi partija šaha odigrala dva razreda od po 24 učenika u međusobnom dvoboju?

   (c) Na koliko načina može petero djece razdijeliti među sobom 12 jabuka, 10 krušaka i 8 naranči?

2. Na kvadratnom zemljištu $1km \times 1km$ raste 3110 stabala promjera $50cm$. Da li se u šumi može pronaći mjesta za tenisko igralište $25m \times 25m$ za koje ne treba sječa?

3. Na drugoj godini ima 400 studenata, od kojih se neki bave sportom i to: 180 s nogometom, 130 s košarkom, 100 s rukometom, 40 s nogometom i košarkom, 30 s nogometom i rukometom, 20 s košarkom i rukometom, a 10 sa sva tri ta sporta. Kolika je vjerojatnost da se nasumce izabrani učenik bavi s:

   (a) bar jednim sportom

   (b) samo jednim sportom

   (c) bar dva sporta

   (d) sva tri sporta?

4. Velika serija proizvoda neke tvornice daje 2% škarta. Koliko najmanje proizvoda treba izabrati pa da vjerojatnost da se među njima nađe bar jedan defektan bude $p = 95\%$?

5. Četiri aviona nezavisno jedan od drugog bombardiraju brod. Vjerojatnost p_i da bomba iz i-tog aviona ($i = 1, 2, 3, 4$) pogodi brod je redom: $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.3$, $p_3 = 0.4$ i $p_4 = 0.5$.

   (a) Kolika je vjerojatnost da brod bude pogođen?

   (b) Kolika je vjerojatnost da protuzračna obrana sruši sve avione, a niti jedan avion ne pogodi brod?

6. U pošiljci je 15 mobitela, a pet ih je neispravnih. Netko kupi 3 mobitela. Odredite vjerojatnosti broja neispravnih mobitela u kupovini, očekivani broj neispravnih mobitela i funkciju razdiobe broja neispravnih mobitela u uzorku od tri kupljena.

7. Iz zadane funkcije gustoće vjerojatnosti na slici (stranice trokuta s vrhovima $(-1,0),(0,a>0),(3,0)$ bez stranice na osi $0X$, dijelovi osi $0X$ bez dužine od -1 do 3) potrebno je izračunati:

   (a) parametar a

   (b) matematičko očekivanje.

   (c) Nacrtajte funkciju distribucije i odredite $p(-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2})$.

8. Od kuće do ureda Martina prolazi kroz 6 nesinhroniziranih semafora. Izračunajte očekivani broj semafora na kojim će se zaustaviti, ako je duljina ciklusa $45s$, zeleno svijetli $25s$ Koliko je standardno odstupanje od tog broja?

9. Mazdini automobili imaju grešku u 4% slučajeva. Kolika je vjerojatnost da će od 100 automobila proizvedenih ove godine na više od 5 biti reklamacija?

10. Prosječan dnevni promet na autocesti u špici sezone iznosi 12000 automobila dnevno. Za prijelaz autoceste medvjed treba 15 sekundi. Koliko je vjerojatno da neće biti udaren onaj medo koji je ipak pronašao prolaz kroz žicu?

11. Prosječan Hrvat prosječnih godina ima višak od $20kg$ s odstupanjem $\pm 4kg$ Kolika je vjerojatnost da prosječna Hrvatica prosječnih godina nađe partnera sa

    (a) viškom manjim od $5kg$?

    (b) viškom većim od $25kg$

    (c) Koliko kilograma viška ima 80% Hrvata?

5 Statistika

Statistika je znanstvena disciplina koja se bavi izučavanjem masovnih pojava: broj stanovnika, broj zaposlenih, broj telefonskih usluga ....

Središnje pitanje kojim se bavi je utvrđivanje zakonitosti, odnosno pravilnosti po kojima se ravnaju **masovne pojave**, koje se najčešće karakteriziraju numerički. Na temelju takvih numeričkih pokazatelja pomoću statističkih metoda donose se zaključci i predviđanja.

Podaci numeričkog, ali i nenumeričkog tipa dobivaju se

- opažanjem
- praćenjem
- evidentiranjem
- mjerenjem

Obilježje je zajedničko svojstvo koje se odnosi na neki skup.

Statistički skup ili statistička masa je skup na čije elemente se odnosi obilježje.

Primjer 16 *Promatra se broj obavljenih telefonskih razgovora s određenog pretplatničkog broja u toku jednog mjeseca.*

- *statistički skup predstavljaju preplatnici koji su s broja pozvani*
- *obilježje je osobina pretplatničkog broja da je pozvan sa broja koji se promatra*

Jedan statistički skup može imati više obilježja i tada je zanimljivo promatrati povezanost obilježja.

U metodološkom obliku razlikujemo **deskriptivnu** i **matematičku** statistiku.

Deskriptivna statistika bavi se opisivanjem pojava numerički i grafički ističući određene vrijednosti obilježja. Obično se primjenjuje u ispitivanju javnog mišljenja.

Matematička statistika bavi se izučavanjem masovnih pojava pomoću matematičkih metod koje se baziraju na teoriji vjerojatnosti i teoretskih distribucija.

Obilježja mogu imati diskretni i kontinuirani karakter. Obilježje diskretnog karaktera numerički je određeno prebrojivim skupom brojeva.

Primjer 17 *Broj pisama predatih u jednoj pošti je diskretno obilježje, a vrijeme pružanja poštanske usluge telefona je kontinuirano obilježje*

Uzorak je dio statističkog skupa na kojem se ispituje ponašanje cijelog skupa.

Grupiranje podataka provodi se radi obrade.

Primjer 18 *Na jednom čovjeku izvršeno je 50 mjerenja vremena reakcije i dobiveni su rezultati:*

196	173	186	189	173	165	167	160	140	174	180	151
157	164	154	169	190	180	163	157	169	167	165	160
177	165	157	177	159	175	166	173	185	177	184	183
162	192	174	162	165	172	158	169	146	170	171	169
168	153										

Uobičajeno je rezultate grupirati u razrede. Najčešće se broj razreda kreće između 10 i 20. Što je broj mjeranja manji i broj razreda je manji. Razredi su jednaki po veličini, pa se interval razreda dobiva tako da se raspon rezultata podijeli sa željeni broj razreda.

Ako se u primjeru odluče rezultati grupirati u 12 razreda, tada će interval biti

$$\frac{196 - 140}{12} = 4.67 \sim 5.$$

Krajnji rezultat unosa u postavljenje razrede je:

$vrijeme$	$frekvencija$
$140 - 144$	1
$145 - 149$	1
$150 - 154$	3
$155 - 159$	5
$160 - 164$	6
$165 - 169$	12
$170 - 174$	8
$175 - 179$	4
$180 - 184$	4
$185 - 189$	3
$190 - 194$	2
$195 - 199$	1

Primjer 19 (Diskretno obilježje) *Evidentiranjem broja predatih telegrama u toku jednog dana u jednoj pošti dobivene su vrijednosti:*

> x_i*-broj telegrama u toku dana*
>
> f_i*-broj dana tijekom kojih je primljeno* x_i *telegrama*
>
> *ukupan broj dana*
>
> $$\sum f_i = n$$
>
> *relativna frekvencija ima značenje vjerojatnosti a'posteriori*
>
> $$f(x_k) = \frac{f_i}{n}$$
>
> *kumulativna frekvencija*
>
> $$F(x_i) = \sum_{k \leq i} f(x_k)$$

x_i	f_i	$f(x_i)$	$F(x_i)$
0	2	2/118	2/118
1	4	4/118	6/118
2	8	8/118	14/118
3	13	13/118	27/118
4	15	15/118	42/118
5	19	19/118	61/118
6	18	18/118	79/118
7	15	15/118	94/118
8	13	13/118	107/118
9	8	8/118	115/118
10	3	3/118	118/118
$\sum$	118	1	$\emptyset$

Primjer 20 (Kontinuirano obilježje) *Potrošnja goriva x_i u litrama na 100 kilometara kod kamiona nekog autoparka obrađena je u tablici:*

x_i	$\bar{x}_i$	f_i	$f(\bar{x}_i)$	$F(\bar{x}_i)$
$22-24$	23	2	$0,10$	$0,10$
$24-26$	25	7	$0,35$	$0,45$
$26-28$	27	8	$0,40$	$0,85$
$28-30$	29	2	$0,10$	$0,95$
$30-32$	31	1	$0,05$	$1,00$
$\sum$		$n=20$	1	

Što je ovdje statistički skup, a što je statističko obilježje?

Poligoni frekvencija su grafovi u kojima se zorno prikazuje funkcijska ovisnost različitih frekvencija o vrijednosti obilježja.

5.1 Mjere centralne tendencije

Određivanje sredina najčešća je aktivnost u obradi podataka.

Aritmetička sredina računa se

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i f_i$$

Zadatak 42 *Izračunajte prosječan dnevni broj primljenih telegrama i izračunajte prosječnu potrošnju kamiona iz navedenih primjera.*

Zadatak 43 *Izračunajte prosječno vrijeme reakcije izravno i nakon raspodjele u razrede.*

Centralna vrijednost ili **medijan** je vrijednost koja se u nizu rezultata poredanih po veličini, nalazi točno u sredini.

Primjer 21 *Ako pet namještenika prima plaću preračunatu u Eure od 750, 800, 850, 900 i 5000, onda aritmetička sredina od*

$$\frac{750 + 800 + 850 + 900 + 5000}{5} = 1660$$

Eura odudara od stvarnog prosjeka.

Isticanje centralne vrijednosti eliminira ekstremne rezultate.

Primjer 22 *Naseljena mjesta nalaze se uz cestu. Od prvog mjesta drugo je udaljeno 30km, treće 60, četvrto 110, zatim je na 120. i 130. kilometru od prvog još po jedno mjesto.*

Na kojem je mjestu uz cestu prikladno izgraditi benzinsku, ako su mjesta približne veličine.

Centralno je mjesto na pola puta između 60. i 110. kilometra

Dominantna vrijednost ili **mod** je ona vrijednost koja je u nizu mjerenja najčešće postignuta.

Primjer 23 *Prikupljajući podatke o broju djece dobiveni su podaci:*

djeca	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
parovi	70	90	108	86	70	47	30	20	15	5	4	3	2

Vidljiv je mod od 2 djece, dok je aritmetička sredina 3.02 djeteta. Dakle pri gradnji stanova za prosječnu obitelj sa 3 djece činila bi se pogreška.

Geometrijska sredina koristi se kao mjera prosječne brzine nekih promjena. Dobiva se formulom:

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1^{f_1} \cdot x_k^{f_k}}$$

uz navedene oznake. Računa se samo za pozitivne brojeve.

Primjer 24 *Na nekom je području 1960. godine živjelo 2000 stanovnika, 1961. bilo ih je 9000, a 1962. čak 18000. Prosječno godišnje povećanje dobit će se geometrijskom sredinom:*

$$G = \sqrt{4.5 \cdot 2} = 3$$

puta godišnje.

Harmonijska sredina jednaka je

$$\bar{x}_h = \frac{N}{\frac{f_1}{x_1} + \cdots + \frac{f_k}{x_k}},$$

gdje je N broj podataka. Harmonijsku sredinu valja upotrebljavati kad želimo dobiti prosjeke nekih odnosa: prosječnu brzinu, prosječan broj slova u minuti ...

Primjer 25 *Ako je automobilist udaljenost od 100 km vozio brzinom od 100 km/h, a natrag je išao brzinom 50 km/h, kojom je prosječnom brzinom vozio?*

Rješenje. Pograšno je ishitreno odgovoriti: 75 km/h, jer je uistinu prešao 200 km za tri sata, pa je prosjek:

$$\frac{200}{3} = 66.7km/h$$

Rezultat jemoguće dobiti harmonijskom sredinom brzina $100km/h$ i $50km/h$:

$$H = \frac{2}{\frac{1}{100} + \frac{1}{50}} = 66.7km/h$$

Zadatak 44 *Tri kućanice su u anketi iskazale koliko dana u njihovoj obitelji traje staklenka od* $1kg$ *marmelade: 5 dana, 10 dana i 15 dana. Koliko prosječno traje staklenka marmelade?*

Rješenje. Ne traje 10 dana, jer za 30 dana ukupno sva tri domaćinstva potroše 11 staklenki, pa $1kg$ traje za sva tri domaćinstva

$$\frac{30}{11} = 2.72$$

dana. Jednom bi domaćinstvu kilogram trajao

$$3 \cdot 2.72 = 8.2$$

dana, što se i dobiva računom harmonijske sredine:

$$H = \frac{3}{\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15}} = 8.2$$

Zadatak 45 *Četiri radnika, A,B,C i D izvrše određeni tip usluge redom za 10, 6, 5 i 4 minute. Izračunajte prosječnu proizvodnost radnika, tj. vrijeme koje se traži za pružanje usluge.*

Rješenje. Prosječno vrijeme pružanja usluge je harmonijska sredina:

$$H = \frac{4}{\frac{1}{10} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4}} = 5.581$$

minuta

5.2 Mjere varijabilnosti

Mjere varijabilnost odgovaraju na pitanje veće ili manje grupiranosti statističkog niza oko centralne vrijednosti.

5.2.1 Raspon

Raspon statističkog niza razlika je najvećeg i najmanjeg rezultata. Raspon je nesigurna i varljiva mjera varijabilnosti i raste s povećanjem broja rezultata.

Primjer 26 *Prilikom dva puta po 10 mjerenja neke pojave, dobiveni su slijedeći nizovi podataka:*

1. mjerenje	*8*	*8,5*	*8,5*	*9*	*9*	*9*	*9*	*9,5*	*9,5*	*10*
2. mjerenje	*1*	*2*	*3*	*5*	*9*	*9*	*13*	*15*	*16*	*17*

Odrediti raspone oba mjerenja.

5.2.2 Srednje odstupanje

Srednje odstupanje je prosječna veličina odstupanja pojedinačnih rezultata:

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} |x_i - \bar{x}| \cdot f_i}{n},$$

gdje je n ukupan broj pojedinačnih rezultata, a N broj međusobno različitih rezultata.

Zadatak 46 *Odrediti srednje odstupanje od aritmetičke sredine iz prethodnog primjera.*

Napomena Prosječno odstupanje računa se uz aritmetičku sredinu, centralnu (medijan) i dominantnu (mod) vrijednost.

Apsolutna vrijednost je neophodna, jer inače:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x}) \cdot f_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} x_i f_i - \bar{x}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} f_i = 0$$

5.2.3 Standardna devijacija

Kvadriranjem odstupanja izbjegavaju se negativni predznaci.

Varijanca je aritmetička sredina kvadratičnih odstupanja.

Deskriptivna statistika proučava karakteristike točno određenje skupine podataka koji su posljedica ispitivanja cijele populacije: svih studenata određenog sveučilišta, svih građana nekog grada ...

Varijanca se u tom slučaju računa formulom

$$Var = \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i}(x_i - \bar{x})^2 f_i.$$

Matematička statistika pokušava na temelju podataka iz dostupnog uzorka izvesti zaključke u vezi s cijelom populacijom iz koje je uzorak izdvojen. U tom slučaju, standardna se devijacija računa formulom:

$$Var = \sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i}(x_i - \bar{x})^2 f_i.$$

Standardna devijacija veličina je bitna za razumijevanje varijabiliteta i jednaka je drugom korjenu iz varijacije

$$\sigma = \sqrt{Var}.$$

Zadatak 47 *Izračunajte standardne devijacije iz mjerenja u primjeru 26.*

Budući je aritmetička sredina decimalan broj, varijancu je moguće izračunati i formulom:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i} x_i^2 f_i - \bar{x}^2$$

koja predstavlja razliku srednje vrijednosti kvadrata obilježja i kvadrata srednje vrijednosti obilježja.

Zadatak 48 *Izračunati standardnu varijancu za 50 dobivenih vremena reakcije iz primjera 18.*

5.2.4 Koeficijent varijabilnosti

Podatak koji služi za uspoređivanje varijabilnosti različitih pojava i svojstava, a prikazuje postotak vrijednosti aritmetičke sredine koji pripada standardnoj devijaciji:

$$v = \frac{\sigma}{\bar{x}}.$$

Uobičajeno je u fizikalnim mjerenjima koficijent nazvati relativnom pogreškom.

Zadatak 49 *Jednim je mjerenjem ustanovljeno da 10-godišnji dječaci imaju visinu* $134.4 \pm 6.06 cm$*, dok im je težina* $29.2 \pm 3.89 kg$*. Variraju li više dječaci u visini ili u težini?*

5.3 Grafičko prikazivanje rezultata

U statistici grafičko prikazivanje rezultata pridonosi uočavanju karakteristika koje je nemoguće uočiti samo iz brojeva. Teške računske pogreške jednostavno se otkrivaju ako su rezultati prikazani grafički.

Histogram se sastoji od niza pravokutnika kojima vovršina odgovara ukupnoj frekvenciji.

Poligon frekvencija crta se tako da se spoje točke iznad sredine svakog razreda, a zatim se dovodi na nultu frekvenciju na lijevoj i desnoj strani krivulje.

Zadatak 50 *Nacrtajte histogram i poligon frekvencija za primjer*

5.4 Metode statističkih zaključivanja

Osnovni skup čine svi elementi na koje se odnosi obilježje X. Naziva se i populacijom, naročito za žive objekte statističkog skupa.

Uzorak je dio elemenata osnovnog skupa na kojem vršimo ispitivanje. Reprezentativnost uzorka je mjera za vjernost kojom uzorak predstavlja cijelu populaciju.

Prilikom formiranja uzorka nastoji se štovati princip slučajnog izbora, tako da svaki element iz osnovnog skupa ima jednaku vjerojatnost biti izabran. Prilikom telefonskih anketa koriste se tablice **slučajnih brojeva**.

Osnovno je pitanje kako na temelju uzorka zaključiti nešto o osnovnom skupu? Kako odrediti karakteristiku i zakonitosti po kojima se ravna obilježje u osnovnom skupu.

Metode teorije uzoraka bave se pitanjima:

1. Statističke procjene osnovnih karakteristika poput očekivanja $E(X)$ i standardne devijacije σ.
2. Testiranje statističkih hipoteza o osnovnim karakteristikama.

5.4.1 Karakteristike uzoraka

Za obilježje X uzorak će biti predstavljen nizom slučajnih veličina

$$x_1, x_2, \ldots x_n.$$

Aritmetička sredina uzorka odgovara očekivanju slučajne varijable i računa se po uobičajenoj formuli:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N} x_i f_i$$

gdje je

- n - broj slučajnih veličina
- N - broj razreda, odnosno broj različitih slučajnih veličina
- f_i - frekvencija i-tog razreda
- x_i - reprezentant slučajne veličine

Disperzija uzorka odgovara standardnoj devijaciji i uvijek se računa po formuli

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (x_i - \bar{x})^2 f_i$$

Testiranje uzorka odgovara na pitanje koliko je dobra procjena. Postoje točkovne i intervalne procjene ovisno o uređenosti podataka.ž

6 Testiranje statističkih hipoteza

U statističkim analizama pojedinih obilježja postavljaju se hipoteze o nekom parametru ili o kompletnoj distribuciji. Takve hipoteza zovu se **statističke hipoteze**, a postupak kojim se donosi odluka o prihvačanju dotične hipoteze naziva se **statistički test**.

U klesičnim testovima utvrđuje se značajnost ili **signifikantnost** razlike hipoteznih vrijednosti i vrijednosti dobivenih na osnovu uzorka.

Primjer 27 *Običan simetrični novčić pada na glavu s vjerojatnosti* $1/2$. *Gospodin Krupić imao je rijedak zlatnik koji je padao na glavu s vjerojatnosti* $3/4$, *ali ga je izgubio. Kad je našao sličan novčić odlučio ga je isprobati tako da ga baci 10 puta, pa ako najmanje 7 puta padne na glavu, pravi je. Pitanja su:*

- *koliko je vjerojatno da je novčić rijedak, a da ipak nije pao na glavu 7 puta?*
- *koliko je vjerojatno da je novčić običan, a ipak je pao na glavu barem 7 puta?*

Rješenje. Neka je novčić rijedak. Tada se promatra binomna slučajna varijabla $\mathcal{B}(n = 10; p = 0.75)$ u kojoj je uspjeh kada novčić padne na glavu. Nije pao na glavu 7 puta ako je pao najviše 6 puta:

$$
\begin{aligned}
p(x \le 6) &= p(x = 0) + p(x = 1) + \cdots + p(x = 6) \\
&= \binom{10}{0} 0.75^0 0.25^{10} + \binom{10}{1} 0.75^1 0.25^9 + \cdots + \binom{10}{6} 0.75^6 0.25^4 \\
&= \sum_{k=0}^{6} \binom{10}{k} \cdot 0.75^k \cdot 0.25^{10-k} = 0.2241
\end{aligned}
$$

U drugom slučaju vjerojatnost da u binomnoj varijabli $\mathcal{B}(n = 10, p = 0.5)$ novčić padne barem 7 puta jednaka je

$$p(7 \le x \le 10) = \sum_{k=7}^{10} \binom{10}{k} \cdot 0.75^k \cdot 0.25^{10-k} = 0.1719$$

Primjer 28 *Neka je obilježje X vrijeme trajanja pružanja neke usluge. Postavlja se hipoteza*

$$H_0 : \quad E(X) = E_0 = 12min.$$

Tada je alternativna hipoteza

$$H_1 : \quad E(X) \neq E_0.$$

Ako se na uzorku dobije prosječno vrijeme usluge

$$\bar{x} = 10min,$$

pitanje je da li je razlika

$$|\bar{x} - E_0| = 2$$

značajna?

Prilikom donošenja odluke o prihvaćanju, odnosno odbijanju uzorka čiji je izbor slučajan, moguća je pogreška.

Greška prve vrste radi se kod odbacivanja istinite hipoteze.

Greška druge vrste radi se kod prihvaćanja neistinite hipoteze:

	Prihvaćanje	Odbacivanje
H_0 (*istinita*)	Ispravno	Greška I vrste
H_1 (*neistinita*)	Greška II vrste	Ispravno

α je vjerojatnost za grešku prve vrste ili nivo signifikantnosti

β je vjerojatnost za grešku druge vrste

$1 - \beta$ je jakost testa

U postupku testiranja hipoteze nastoji se da su vjerojatnosti α i β što je moguće manje. Unaprijed se odredi vjerojatnost α koja iznosi 1% ili 5%.

6.0.2 Testiranje hopoteze o distribuciji u osnovnom skupu

U primjerima slučajnih varijabli pretpostavka je da slučajna veličina im određeni tip distribucije. To se pretpostavlja na temelju prirode slučajnih veličina ili njenih karakteristika.

Primjerice, ako je

$$E(X) \sim Var(X)$$

tada se vjerojatno radi o Poissonovoj distribuciji:

$$\lambda = E(X) = Var(X).$$

Ako se relativne frekvencije okupljaju oko vrijednosti medijana, tada je moguće da se radi o binomnoj, odnosno normalnoj distribuciji:

$$\mathcal{B}(n,p); \qquad E(X) = np,$$

odnosno

$$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2); \qquad \mu = E(X), \quad \sigma^2 = Var(X)$$

Ako je pretpostavka distribucije statistička hipoteza, potrebno je provesti testiranje na temelju uzorka.

Potrebno je utvrditi da li je razlika između **empirijskihi teorijskih** frekvencija statistički značajna ili nije :

- f_i - empirijske frekvencije
- f_i^* - teorijske frekvencije
- $f_i - f_i^*$ - razlika frekvencija

Ako razlika nije statistički značajna, hipoteza se prihvaća, a u protivnom se odbacuje.

Testiranje se provodi na temelju
chi^2 distribucije i naziva se χ^2 test.

Neka je $F_0(x)$ pretpostavljeni tip distribucije: binomna, Poissonova, uniformna, eksponencijalna, normalna.

Hipoteze

H_0: $F(x) = F_0(x)$

H_1: $F(x) \neq F_0(x)$

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - f_i^*)^2}{f_i^*},$$

gdje je

k - broj razreda

$f_i^* = n \cdot p\,(X = x_i)$

n - ukupan broj podataka

Ocjena statističke značajnosti provodi se usporedbom χ_0^2, koji treba biti manji od kritičnog broja C. Kritični broj C određuje se iz tablica χ^2 distribucije uz

$$k - r - 1$$

stupnjeva slobode, gdje je

k - broj razreda: broj intervala podataka ili različitih, po veličini poredanih, podataka

r - broj parametara hipotetske distribucije. Sve su distribucije određene jednim, $r = 1$ parametrom, osim normalne, koja je određena s dva, $r = 2$ parametra: μ i σ.

Ako ima razreda s frekvencijom manjom od 5, onda se spajaju razredi sa susjednima sve dok zajednička frekvencija ne prijeđe 5.

Kritični broj C očitava se kao rješenje jednadžbe

$$F(C) = 1 - \alpha$$

iz tablice χ^2 distribucije

Primjer 29 *Mjeren je broj minuta f_i u kojima je pozvan telefonski broj za informacije na cestama točno određeni broj puta x_i. Dobiveni rezultati su slijedeći:*

x_i	f_i
0	33
1	17
2	7
3	3

Testirajte hipotezu o Poissonovoj distribuciji broja poziva u minuti na nivou signifikantnosti $\alpha = 0.01$.

Rješenje.

Potrebno je znati da je funkcija vjerojatnosti Poissonove distribucije zadana parametrom

$$\lambda = E(x) = \bar{x}$$

i računa se po formuli

$$f(x_i) = p(X = x_i) = \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} \cdot e^{-\lambda},$$

gdje je x_i cijeli broj i predstavlja broj poziva informacija u minuti.

Prispodoba podacima dobivenim eksperimentalno upravo je njihova srednja vrijednost:

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
0	33	0
1	17	17
2	7	14
3	3	9
$\sum$	60	40

jednaka

$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_i x_i f_i = \frac{1}{60} \cdot 40 = 0.66 \sim 0.7$$

Tražena funkcija gustoće vjerojatnosti sada će vjerojatnost svakog određenog broja poziva u minuti računati s vjerojatnosti

$$p(X = x_i) = f(x_i) = \frac{0.7^{x_i}}{x_i!} \cdot e{-}0.7$$

Tablica teoretskih frekvencija izgleda:

x_i	$p_i = f(x_i) = p(X = x_i)$	$f_i^* = n \cdot p_i$
0	$0,4960$	$29,796 \sim 30$
1	$0,3476$	$20,856 \sim 21$
2	$0,1217$	$7,302 \sim 7$
3	$0,0284$	$1,702 \sim 2$

Izračunavanju χ^2 za podatke iz prethodnih tablica prethodi spajanje 4. razreda s trećim, jer statističari zahtijevaju da ni jedna ***očekivana*** frekvencija ne bude manja od 5 :

x_i	f_i	f_i^*	$f_i - f_i^*$	$\frac{(f_i-f_i^*)^2}{f_i^*}$
0	33	30	3	$0,3$
1	17	21	-4	$0,76$
$2,3$	10	9	1	$0,11$
$\sum$				$\chi_0^2 = 1.17$

Kritični broj C rješenje je jednadžbe

$$F(C) = 1 - \alpha = 0.99,$$

gdje je $F(C)$ χ^2 distribucija sa stupnjem slobode:

$$k - r - 1 = 3 - 1 - 1 = 1,$$

jer je

k broj razreda nakon spajanja, a to je 3

r broj parametara, a to je jedan jedini, λ

Uvjet

$$\chi^2 \leq C$$

ovdje je očito ispunjen, jer je iz tablice $C = 6.63$

Hipoteza se ne odbacuje, već se prihvaća.

Zadatak 51 *Mjerenjem brzine vozila na jednoj dionici prometnice dobiveni su slijedeći podaci*

v_i	f_i
$40 - 60$	8
$60 - 80$	35
$80 - 100$	27
$100 - 120$	6
$120 - 140$	2
$\sum$	78

Testirajte hipotezu normalne razdiobe uz $\alpha = 5\%$.

Rješenje Binomna distribucija određena je matematičkim očekivanjem

$$\mu = E(V) = \bar{v}$$

i standardnom devijacijom σ koji se računaju iz proširene tablice:

v_i	f_i	$\bar{v}_i$	$\bar{v}_i \cdot f_i$	$\bar{v}_i - \bar{v}$	$(\bar{v}_i - \bar{v})^2 \cdot f_i$
$40 - 60$	8	50	400	$-29,5$	6962
$60 - 80$	35	70	2450	$-9,5$	$3158,75$
$80 - 100$	27	90	2430	$10,5$	$2976,75$
$100 - 120$	6	110	660	$30,5$	$5581,5$
$120 - 140$	2	130	260	$50,5$	$5100,5$
$\sum$	$n = 78$		6200		$23779,5$

Matematičko očekivanje ima vrijednost aritmetičke sredine predstavnika svakog od razreda mjerenja, a predstavnici razreda $\bar{v}_i$ računaju se kao aritmetičke sredine granica intervala, jer je nepoznata, a time i statistički nebitna struktura mjerenih brzina unutar intervala:

$$\mu = E(V) = \bar{v} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} \bar{v}_i \cdot f_i = \frac{1}{78} \cdot 6200 = 79,457 \sim 79,5$$