

1 Zadaci za vježbu

2 Vjerojatnost

Zadatak 1 *Kolika je vjerojatnost da se pri trostrukom bacanju igračice kocke ne pojavi trostruka šestica?*

Zadatak 2 *Simetričnu kocku bacamo 6 puta. Kolika je vjerojatnost da se pojavi svaki od brojeva od 1 do 6?*

Zadatak 3 *Kolika je vjerojatnost da između triju na slučajan način izabranih osoba barem dvije imaju rođendan istog dana?*

Zadatak 4 *Iz skupa $\{3, 4, 5, 6, 7\}$ slučajno se bira jedan broj, a zatim se iz preostalog skupa bira opet jedan broj. Kolika je vjerojatnost da će biti izabrana*

(a) *2 neparna broja?*

(b) *1 paran i 1 neparan broj?*

Zadatak 5 *Iz skupa $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ slučajno se bira broj c , a zatim se sastavlja kvadratna jednadžba $x^2 + 4x + c = 0$. Kolika je vjerojatnost da rješenja te jednadžbe budu*

(a) *realni brojevi?*

(b) *cijeli brojevi?*

Zadatak 6 *Dane su dužine duljine 2, 5, 6, 10. Kolika je vjerojatnost da se od 3 slučajno odabrane dužine može sastaviti trokut?*

Zadatak 7 *Na 5 jednakih listića ispisana su slova I, L, P, S, T. Listići se izmiješaju i zatim slučajno stave u niz. Kolika je vjerojatnost da se dobije riječ "SPLIT"?*

Zadatak 8 *Osmero ljudi slučajno sjeda na osam stolica. Kolika je vjerojatnost da 2 određene osobe sjede jedna do druge?*

Zadatak 9 *Tri strijelca odjednom gađaju (nezavisno jedan od drugoga) jednu metu. Vjerojatnost pogotka za svakog strijelca redom iznosi 0.8, 0.7 i 0.6. Kolika je vjerojatnost da točno jedan strijelac pogodi metu?*

Zadatak 10 *Poznato je da se prilikom bacanja igraće kocke 10 puta pojavila barem jedna šestica. Kolika je vjerojatnost da su pale barem dvije šestice?*

Zadatak 11 *Dva se broja na slučajan način odjednom izabiru između brojeva $1, 2, \dots, 10$. Ako je poznato da je njihov zbroj paran broj, nađite vjerojatnost da su oba neparna.*

Zadatak 12 *Iz skupa $S = \{1, 6, 7, 8, 9\}$ slučajno se bira jedan broj, a iz preostalog skupa još jedan broj. Kolika je vjerojatnost da drugi izabrani broj bude neparan?*

Zadatak 13 *Na montažu dolaze proizvodi izrađeni na dva stroja, pri čemu 60% svih proizvoda dolazi s prvog stroja, a 40% s drugog. Prvi stroj proizvodi 90% proizvoda tipa "A", a drugi stroj 60% proizvoda tipa "A". Na montažu je došao jedan proizvod i pokazalo se da je on tipa "A". Kolika je vjerojatnost da je on izrađen na prvom stroju?*

Zadatak 14 *U uzorku čiji dio čini 55% muškaraca, 70% muškaraca i 60% žena puši. Kolika je vjerojatnost*

(a) *da slučajno izabrana osoba ne puši?*

(b) *da je slučajno izabrana osoba, koja puši, žena?*

Zadatak 15 *Dva strijelca, S_1 i S_2 , svaki s jednim metkom, gađaju istu metu, nezavisno jedan od drugoga. Vjerojatnost da S_1 pogodi metu iznosi 0.8, a vjerojatnost da S_2 pogodi metu iznosi 0.4. Ako je nakon gađanja utvrđeno da je meta pogođena jednim metkom, kolika je vjerojatnost da je to učinio strijelac S_1 ?*

Zadatak 16 *Kolika je vjerojatnost da se za slučajno izabrani kut α iz segmenta $[0, 2\pi]$ vrijedi relacija $\frac{1}{2} \leq \sin \alpha \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$?*

Zadatak 17 Brojevi α i β biraju se slučajno iz intervala $[0, 1]$. Kolika je vjerojatnost da korijeni jednadžbe $x^2 + \alpha x + \beta^2 = 0$ budu realni?

Zadatak 18 Na dužinu AB duljine a slučajno je bačena jedna točka. Kolika je vjerojatnost da ta točka padne bliže središtu nego:

(a) točki A ?

(b) jednom od krajeva dužine?

3 Slučajne varijable

Zadatak 19 U kutiji je 25 proizvoda, od toga 5 loših. Slučajno se bira jedan proizvod, 4 puta, s vraćanjem. Neka je X slučajan broj loših proizvoda među izvučenim. Odredite zakon razdiobe slučajne varijable X te $P(2 \leq X \leq 4)$.

Zadatak 20 Dva strijelca S_1 i S_2 gađaju po jednom u istu metu. Vjerojatnost pogotka za S_1 iznosi 0.7, a za S_2 0.6. Ako je slučajna varijabla X broj pogodaka u metu, nađite razdiobe slučajne varijable X , funkciju distribucije od X te $P(X \leq 1)$.

Zadatak 21 Ako slučajna varijabla X ima funkciju gustoće vjerojatnosti

$$f(x) = \begin{cases} 2x & ; 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & ; \text{inače} \end{cases}$$

odredite $P(X \leq \frac{1}{2})$, $P(\{X \leq \frac{1}{2}\} | \{\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\})$.

Zadatak 22 Slučajna varijabla X ima distribuciju

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

Odredite distribuciju slučajne varijable $Y = 2|X| - 3$.

Zadatak 23 Neka slučajna varijabla X označava rezultat bacanja simetrične kocke. Izračunajte $E(X)$, $E(2X + 1)$, $V(X)$, $V(2X + 1)$.

4 Razdiobe

Zadatak 24 Jedan automat daje 10% škarta. Ako automat radi ujednačeno, kolika je vjerojatnost da u slučajnom uzorku od 7 proizvoda budu točno 3 loša proizvoda?

Zadatak 25 Kocka je bačena 8 puta. Kolika je vjerojatnost da se broj 5 pojavi od 3 do 5 puta?

Zadatak 26 Neka operacija uspijeva u 75% slučajeva. Treba naći vjerojatnost da baš 75% od 8 pacijenata preživi tu operaciju.

Zadatak 27 Zadana je Poissonova razdioba s parametrom $m = 2$. Kolika je vjerojatnost da u toj razdiobi varijabla X primi vrijednost 3?

Zadatak 28 Vijek trajanja jedne vrste elektroda, izražen u satima, je slučajna varijabla X s razdiobom $N(100, 25)$. Koliki je najdulji vijek trajanja za 5.48% elektroda?

Zadatak 29 Ako je $X \sim N(12, 4)$, odredite $P(X^2 > 6X)$.

Zadatak 30 Neka je $X \sim N(a, b)$. Nađite c kao funkciju od a i b ako vrijedi $P(X \geq c) = 5P(X < c) + 0.48796$.

5 "Mix zona"

Zadatak 31 (*) U kutiji imamo 4 crne i 6 bijelih kuglica.

(a) Na koliko različitih načina ih možemo poredati u niz?

(b) Ako iz kutije istovremeno uzmemo 3 kuglice iste boje, na koliko načina to možemo napraviti?

(c) Pretpostavimo da smo svaku kuglicu označili jedinstvenim brojem (npr. brojevima od 1 do 10) i time ih učinili međusobno različitim. Na koliko

načina možemo sadržaj te kutije podijeliti u dvije nove kutije, ako znamo da u prvoj kutiji mora biti točno 3 kuglice, a u drugoj kutiji preostalih 7 kuglica?

Zadatak 32 (*) Dva košarkaša (K_1 i K_2) nezavisno izvode po jedno slobodno bacanje. Vjerojatnost pogotka košarkaša K_1 iznosi 0.55, a vjerojatnost pogotka košarkaša K_2 iznosi 0.68.

- (a) Kolika je vjerojatnost da su oba košarkaša pogodila?
- (b) Kolika je vjerojatnost da je samo jedan košarkaš pogodio?
- (c) Ako znamo da je, nakon što su oba izvela slobodna bacanja, koš pogodjen samo jednom, kolika je vjerojatnost da je to učinio košarkaš K_1 ?

Zadatak 33 (*) Vjerojatnost da nogometaš postigne zgoditak iz kaznenog udarca je 0.65. Ako je X slučajna varijabla koja označava broj postignutih zgoditaka iz 80 kaznenih udaraca, odredite:

- (a) Razdiobu slučajne varijable X .
- (b) Očekivanje i varijancu slučajne varijable X .
- (c) Vjerojatnost da je nogometaš postigao barem 45 zgoditaka.
- (d) Vjerojatnost da je nogometaš postigao točno 59 zgoditaka.

Zadatak 34 (*) Funkcija gustoće slučajne varijable X dana je s

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ c x(x-1) & 1 \leq x < 2 \\ 0, & x \geq 2 \end{cases}$$

- (a) Odredite konstantu $c \in \mathbb{R}$.
- (b) Odredite funkciju distribucije slučajne varijable X .
- (c) Izračunajte $P\left(0 < X < \frac{3}{2}\right)$.

(d) Izračunajte očekivanje slučajne varijable X .

Zadatak 35 (*) (a) Koliko ima peteroznamenastih brojeva koji se mogu napisati pomoću znamenaka $\{1, 2, 3\}$?

(b) Koliko ima peteroznamenastih brojeva koji se mogu napisati pomoću znamenaka $\{1, 2, 3\}$ tako da se 2 upotrijebi barem jednom?

Zadatak 36 (*) Neka je broj x slučajno izabran iz segmenta $[0, 2]$, a broj y iz segmenta $[0, 3]$. Kolika je vjerojatnost da je:

(a) $x^2 > \frac{1}{4}$ i $y^3 > \frac{1}{8}$?

(b) $x - y > 0$?

(c) $-1 \leq x - y \leq 1$?

Zadatak 37 (*) Igrač tombole slučajno izvlači kupon iz kutije. Vjerojatnost da izvuče dobitni kupon je 0.15. Nakon što igrač izvuče kupon, organizator stavi isti takav kupon u kutiju tako da vjerojatnost izvlačenja dobitnog kupona u sljedećem izvlačenju ostaje ista. Igrač je odlučio izvlačiti 30 kupona. Neka X označava broj dobitnih kupona.

(a) Odredite distribuciju od X .

(b) Kolika je vjerojatnost da je izvukao najviše jedan dobitni kupon?

(c) Kolika je vjerojatnost da je izvukao točno 7 dobitnih kupona?

Zadatak 38 (*) Slučajna varijabla X zadana je razdiobom

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.15 & p & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

(a) Odredite p .

(b) Odredite razdiobu slučajne varijable $Y = X^2 - 3X + 2$.

Zadatak 39 (*) Kockar baca jednu igraču kocku pet puta te svaki puta bilježi koji je broj pao u kojem bacanju.

- (a) Koliko različitih kombinacija može pasti?
- (b) Kolika je vjerojatnost da padnu točno dvije šestice?
- (c) Kolika je vjerojatnost da padnu barem dvije jedinice?
- (d) Kolika je vjerojatnost da padnu točno tri jedinice ako znamo da su pale barem dvije jedinice?

Zadatak 40 (*) Neka je zadan skup $S = \{1, 2, \dots, 99\}$.

- (a) Ako se iz skupa S na slučajan način izabere jedan broj, kolika je vjerojatnost da je taj broj paran?
- (b) Ako se iz skupa S na slučajan način odjednom izaberu dva broja, kolika je vjerojatnost da su oba parna?
- (c) Ako se iz skupa S na slučajan način odjednom izaberu dva broja, kolika je vjerojatnost da je jedan paran, a drugi neparan (poredak nije važan!)?
- (d) Ako se iz skupa S na slučajan način odjednom izaberu dva broja te ako je poznato da je njihov zbroj paran, kolika je vjerojatnost da su oba neparna?

Zadatak 41 (*) Dva kockara (K_1 i K_2) nalaze se za istim stolom. Svatko od njih ima po jednu igraču kocku. Kockar K_1 ima poštnu kocku (D_1), tj. svi brojevi mogu pasti s jednakom vjerojatnošću. Kockar K_2 ima nepoštenu kocku (D_2) čije su vjerojatnosti padanja brojeva dane s:

$$D_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & p & \frac{1}{24} & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} \end{pmatrix}.$$

Prvo kockar K_1 baci svoju kocku, a zatim nakon njega, nezavisno, kockar K_2 baci svoju kocku.

- (a) Odredite parametar p .

- (b) Kolika je vjerojatnost da su oba dobili šestice?
- (c) Kolika je vjerojatnost da zbroj brojeva na kockama, nakon što su oba bacila svoje kocke, iznosi 5?
- (d) Ako znamo da je, nakon što su oba bacila svoje kocke, pala samo jedna šestica, kolika je vjerojatnost da se to dogodilo kockaru K_1 ?

Zadatak 42 (*) Igrač izvlači kartu iz špila od 52 karte, zabilježi koju je kartu izvukao te ju vrati u špil nakon čega se karte promiješaju. Taj postupak se ponovi 180 puta. Označimo s X slučajnu varijablu koja označava koliko puta je igrač izvukao kralja.

- (a) Koja je vjerojatnost da u prvom izvlačenju igrač izvuče kralja?
- (b) Odredite razdiobu slučajne varijable X .
- (c) Kolika je vjerojatnost da je igrač izvukao kralja barem 20 puta?
- (d) Kolika je vjerojatnost da je igrač izvukao kralja točno 6 puta?

Zadatak 43 (*) Neka je broj x slučajno izabran iz segmenta $[0, 3]$, a broj y iz segmenta $[0, 4]$. Kolika je vjerojatnost da je:

- (a) $\{2x < 4 \text{ i } 1 < y < 2\}$?
- (b) $xy > 2$?
- (c) $y < 2x$ ako znamo da je $y > x$?

RJEŠENJA:

1.) $\frac{215}{216} = 0.99537$ 2.) 0.0154 3.) 0.0082 4.) a) $\frac{3}{10}$ b) $\frac{3}{5}$ 5.) a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{10}$
 6.) $\frac{1}{2}$ 7.) $\frac{1}{120}$ 8.) $\frac{1}{4}$ 9.) 0.188 10.) $1 - \frac{10 \cdot 5^9}{6^{10} - 5^{10}}$ 11.) $\frac{1}{2}$ 12.) $\frac{3}{5}$ 13.)
 0.692 14.) a) 0.345 b) $\frac{54}{131}$ 15.) $\frac{6}{7}$ 16.) $\frac{1}{6}$ 17.) $\frac{1}{4}$ 18.) a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ 19.)
 $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.4096 & 0.4096 & 0.1536 & 0.0256 & 0.0016 \end{pmatrix}, P(2 \leq X \leq 4) = 0.1808$

- 20.) $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.12 & 0.46 & 0.42 \end{pmatrix}$, $P(X \leq 1) = 0.58$ 21.) $P(X \leq \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$,
 $P(\{X \leq \frac{1}{2}\}|\{\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\}) = \frac{5}{12}$ 22.) $Y = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 5 \\ 0.1 & 0.5 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$ 23.)
 $E(X) = 3.5$, $E(2X + 1) = 8$, $V(X) = \frac{35}{12}$, $V(2X + 1) = \frac{35}{3}$ 24.) 0.0229
25.) 0.1344 26.) 0.3115 27.) 0.1804 28.) 92 sata 29.) 0.99865
30.) $c = a - 1.37\sqrt{b}$ 31.) a) $\frac{10!}{4!6!}$ b) $\binom{4}{3} + \binom{6}{3}$ c) $\binom{10}{3}$ 32.) a) 0.374 b)
0.482 c) 0.3651 33.) a) $X \sim B(80, 0.65)$ b) $E(X) = 52$, $V(X) = 18.2$ c)
0.9495 d) 0.0251 34.) a) $c = \frac{6}{5}$ b) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{2}{5}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{5} & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$
c) 0.2 d) $E(X) = \frac{17}{10}$ 35.) a) 3^5 b) $3^5 - 2^5$ 36.) a) $\frac{15}{24}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{5}{12}$ 37.) a)
 $X \sim B(30, 0.15)$ b) 0.06 c) 0.0815 38.) a) $p = 0.35$ b) $Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.65 & 0.35 \end{pmatrix}$
39.) a) 6^5 b) $\frac{\binom{5}{2}5^3}{6^5}$ c) $1 - \frac{2 \cdot 5^5}{6^5}$ d) $\frac{\binom{5}{3}5^2}{6^5 - 2 \cdot 5^5}$ 40.) a) $\frac{49}{99}$ b) $\frac{8}{33}$ c) 0.505 d) 0.5102
41.) a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{1}{18}$ c) $\frac{1}{12}$ d) $\frac{2}{7}$ 42.) a) $\frac{1}{13}$ b) $X \sim B(180, \frac{1}{13})$ c) 0.0427 d) 0.0103
43.) a) $\frac{1}{6}$ b) 0.5347 c) 0.4667